DOI:10.11721/cqnuj20140518

一类具时滞的 SEIQRS 计算机病毒模型的稳定性分析*

杨 斌，杨志春
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:考虑计算机自身特点、用户对计算机病毒防范意识增强、反病毒软件的使用、主动防御能力的局限性、手动查杀病毒需要的时间及对病毒进行隔离处理等因素,提出一类具有时滞的 SEIQRS 计算机病毒动力学模型。借助于基本再生数理论及线性化模型的特征方程对该模型进行分析,讨论了阈值 $R_0<1$ 时无病平衡点和 $R_0>1$ 时地方病平衡点在时滞 $\tau=0$ 及 $\tau>0$ 的局部稳定性情况。

关键词:计算机病毒模型;时滞;稳定性

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)05-0100-05

计算机病毒的自我复制及传播行为和人群中流行病传播十分相似。1990 年初,Kephart 等人第一次借助生物学领域已有的数学模型来对计算机病毒进行研究,提出经典的 SIS 病毒模型[1]。在此基础上,不少学者对计算机病毒传播模型加以改进并进行研究,Han 等人引入时滞建立具有潜伏性时滞 SIRS 病毒模型,获得了系统的持续性及稳定性条件[2];Mishra 等人提出 SEIQRS 病毒模型,通过分析系统平衡点条件,得出系统的全局稳定性[3];Feng 等人考虑病毒在不同状态的时滞情况,讨论了平衡点的局部稳定性和 Hopf 分支[4];Mishra 等人分析了关于行为发生率与标准发生率的 SEIQR 的两种病毒模型,讨论了两种不同发生率下,系统平衡点的局部稳定和全局稳定的充分条件[5];Tao 等人考虑病毒的提前防御,建立具有时滞的 SEIR 病毒模型,以时滞为参量,讨论了系统的局部稳定性与局部分叉[6];Yu 等人考虑了在计算机中加入了对病毒的侦测技术,提出了 SEIDQV 的传染模型,讨论了在不同时滞下,平衡点的稳定性及 Hopf 分支情况[7]。

随着计算机的普及使用,人们对计算机病毒的防护意识越来越强。文献[6]考虑病毒软件防御能力的局限性、手动查杀病毒所需的时间等因素,本文在文献[6]基础上,考虑了将病毒文件进行隔离处理及免疫状态可能再次被感染的情况,提出了一种具时滞的 SEIQRS 计算机病毒模型,并利用线性化模型的特征方程对其进行稳定性分析。

1 模型建立

假设网络中一台计算机主机或路由器看着一个节点。假设节点分为易感染节点(Susceptible)、潜伏节点(Exposed)、感染节点(Infected)、隔离节点(Quarantined)、免疫节点(Recover)等 5 个状态。以 $S(t)$ 表示 t 时刻节点未被感染但容易被感染的节点数;$E(t)$ 表示 t 时刻虽已感染病毒但未被触发不具备传染性的节点数;$I(t)$ 表示 t 时刻已经被感染且具有传染性的节点数;$Q(t)$ 表示 t 时刻通过病毒防御或病毒查杀对病毒文件进行隔离,等待用户清除的隔离节点数;$R(t)$ 表示 t 时刻病毒文件被清除而获得对病毒免疫状态的节点数。

根据上述假设,建立如下 SEIQRS 计算机病毒传播动力学模型:

---

* 收稿日期:2013-10-31 修回日期:2013-12-18 网络出版时间:2014-9-17 22:37
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971240);教育部科技重点项目(No. 212138);重庆市高校创新团队(No. KJTD201308);重庆市教委科研项目(No. KJ120630;No. KJ130613)
作者简介:杨斌,男,研究方向为微分方程及其应用,E-mail:cqnuyangbin@163.com;通讯作者:杨志春,E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.019.html

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=b-pS(t)-\beta S(t)I(t)-\mathrm{d}S(t)+\eta R(t-\omega)\\
\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\mathrm{d}E(t)-\sigma E(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma E(t)-\mathrm{d}I(t)-\delta I(t-\tau)-\alpha_1 I(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\delta I(t-\tau)-\mathrm{d}Q(t)-\varepsilon Q(t)+pS(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\varepsilon Q(t)-\mathrm{d}R(t)-\eta R(t-\omega)
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中，β 表示易感染节点与感染节点的传染率系数，b 表示新增加的节点数，p 表示病毒在易感染状态被病毒主动防御软件检测进入隔离状态的概率，d 表示节点自然死亡系数，σ 表示病毒潜伏状态进入感染状态概率，δ 表示已感染病毒经过查杀后进入隔离状态概率，ε 表示病毒在隔离状态等待人为清除的概率，α_1 表示节点因病毒感染死亡的概率，η 表示节点的免疫状态返回到易感染状态的概率，τ，ω 分别表示手动查杀病毒时间和病毒免疫状态重新返回到易感染状态时间。

记某 t 时刻节点总数为 $N(t)$，则

$$N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+Q(t)+R(t)$$

将系统(1)中各式进行相加，得到

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=b-\mathrm{d}N(t)-\alpha_1 I(t)$$

当 $\alpha_1=0$ 时，系统(1)有最大的节点容量数为 $\dfrac{b}{d}$。

进一步假设系统(1)初值均为非负，在各个节点状态值大于等于 0，得到可行域

$$D=\left\{(S,E,I,Q,R)\mid S\geqslant 0,E\geqslant 0,I\geqslant 0,Q\geqslant 0,R\geqslant 0,S+E+I+Q+R\leqslant \frac{b}{d}\right\}$$

且区域 D 是系统(1)的正向不变集。

为了便于分析，现假设节点进入 R 状态后不会再被感染，即设 $\eta=0$，则系统前 3 个方程不含有 Q，R 变量，故可考虑如下系统：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=b-pS(t)-\beta S(t)I(t)-\mathrm{d}S(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\mathrm{d}E(t)-\sigma E(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma E(t)-\mathrm{d}I(t)-\delta I(t-\tau)-\alpha_1 I(t)
\end{cases}
\tag{2}
$$

考虑系统(2)，它存在一个无病平衡点 $E_0==(S_0,E_0,I_0)=(\dfrac{b}{p+d},0,0)$。

记基本再生数

$$R_0=\frac{b\beta\sigma}{(p+d)(d+\sigma)(d+\delta+\alpha_1)}$$

当 $R_0>1$ 时，系统(2)还存在另外一个地方病平衡点

$$E^*=(S^*,E^*,I^*)=\left(\frac{(d+\sigma)(d+\delta+\alpha_1)}{\beta\sigma},\frac{d+\delta+\alpha_1}{\sigma}I^*,\frac{(p+d)(R_0-1)}{\beta}\right)。$$

2 稳定性分析

2.1 无病平衡点的稳定性

定理 1　当 $R_0<1$，$\tau=0$ 时，系统(2)在无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。

证明　考虑系统(2)在 E_0 处的特征方程为

$$\det\begin{Bmatrix}\lambda+p+d & 0 & \beta S_0\\ 0 & \lambda+d+\sigma & -\beta S_0\\ 0 & -\sigma & \lambda+d+\delta+\alpha_1\end{Bmatrix}=0$$

等价于

$$f(\lambda)=(\lambda+p+d)\left\{\lambda^2+[(d+\sigma)+(d+\delta+\alpha_1)]\lambda+(d+\sigma)(d+\delta+\alpha_1)-\frac{\sigma b\beta}{p+d}\right\}。$$

由于

$$R_0<1,(d+\sigma)(d+\delta+\alpha_1)-\frac{\sigma b\beta}{p+d}>0,(d+\sigma)+(d+\delta+\alpha_1)>0$$

得到

$$\lambda_1=-(p+d)<0,\lambda_{2,3}<0。$$

故当 $R_0<1,\tau=0$ 时,E_0 是局部渐近稳定的。 证毕

定理2 在 $R_0<1,\tau>0$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 有如下结论:

1)当 $A_1>0,A_2>0$ 或者 $A_2<0,0<\tau<\tau_c^0$ 时,平衡点 E_0 是局部渐近稳定的;

2)当 $A_1<0,A_2>0$ 或 $\tau>\tau_c^0$ 时,平衡点 E_0 是不稳定的。

其中

$$A_1=\frac{2\sigma\beta b}{p+d}-2(d+\sigma)(d+\alpha_1)+(d+\sigma+d+\alpha_1)^2-\delta^2$$

$$A_2=\left[\frac{\sigma\beta b}{p+d}-(d+\sigma)(d+\alpha_1)\right]^2-(d+\sigma)^2\delta^2$$

$$\tau_0=\frac{1}{w}\arccos\left\{\frac{\left[w^2+\frac{\sigma\beta b}{p+d}-(d+\sigma)(d+\alpha_1)\right](d+\sigma)\delta-(d+\sigma+d+\alpha_1)w^2\delta}{(d+b)^2\delta^2+w^2\delta^2}\right\}。$$

证明 当 $\tau>0$ 时,系统(2)在 E_0 处的特征方程为

$$(\lambda+p+d)(P(\lambda)+Q(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\tau})=0$$

其中

$$P(\lambda)=\lambda^2+(d+\sigma+d+\alpha_1)\lambda+(d+\sigma)(d+\alpha_1)-\frac{\sigma\beta b}{p+d},Q(\lambda)=[\delta\lambda+(d+\sigma)\delta]。$$

记

$$H(\lambda)=P(\lambda)+Q(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0 \tag{3}$$

假设 $\lambda=\mathrm{i}w(w>0)$ 是方程(3)的一个根,分离实虚部得到

$$\begin{cases}w^2+\frac{\sigma\beta b}{p+d}-(d+\sigma)(d+\alpha_1)=(d+\sigma)\delta\cos w\tau+w\delta\sin w\tau\\(d+\sigma+d+\alpha_1)w=(d+\sigma)\delta\sin w\tau-w\delta\cos w\tau\end{cases} \tag{4}$$

求解(4)式可得

$$w^4+A_1w^2+A_2=0 \tag{5}$$

当 $R_0<1$,且 $A_1>0,A_2>0$,方程(5)没有正根,$\tau>0$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的;当 $A_1<0$,$A_2>0$ 时,方程(5)有正实根或实部为正的根,无病平衡点 E_0 是不稳定的;当 $A_2<0$ 时,方程(5)有正实根和负实根,无病平衡点 E_0 在 $0<\tau<\tau_c^0$ 时,平衡点 E_0 是局部渐近稳定的,当 $\tau>\tau_c^0$ 时,平衡点 E_0 是不稳定的。 证毕

定理3 当 $R_0>1,\tau>0$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 有如下结论(A_1 定义见定理2):

1)当 $A_1>0$ 时,平衡点 E_0 是局部渐近稳定的;

2)当 $A_1<0$ 时,平衡点 E_0 是不稳定的。

证明 由于 $R_0>1$,通过简单计算得到 $A_2>0$,当 $A_1>0$ 时,方程(5)没有正根,$\tau>0$ 时,系统(2)在平衡点 E_0 是局部渐近稳定的;当 $A_1<0$ 时,方程(5)有正实根或实部为正的根,无病平衡点 E_0 是不稳定的。 证毕

2.2 地方病平衡点

定理 4　当 $R_0>1,\tau=0$ 时，系统(2)在地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

证明　系统(2)在 E^* 处的雅可比矩阵为

$$\Delta(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+p+d+\beta I^* & 0 & \beta S^* \\ -\beta I^* & \lambda+d+\sigma & -\beta S^* \\ 0 & -\sigma & \lambda+d+\alpha_1+\delta\end{pmatrix}$$

解其特征方程，得到

$$f(\lambda)=\lambda^3+B_1\lambda^2+B_2\lambda+B_3=0$$

其中

$$B_1=d+\sigma+d+\alpha_1+\delta+(p+d)R_0,B_2=(p+d)R_0(d+\sigma+d+\alpha_1+\delta),$$
$$B_3=(d+\sigma)(d+\alpha_1+\delta)(p+d)(R_0-1)$$

当 $R_0>1$ 时，$B_1>0$，$B_2>0,B_3>0$，验证 Hurwitz 定理，得

$$\Delta_1=B_1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}B_1 & B_3 \\ 1 & B_2\end{vmatrix}=B_1B_2-B_3>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}B_1 & B_3 & 0 \\ 1 & B_2 & 0 \\ 0 & B_1 & B_3\end{vmatrix}=B_3\ (B_1B_2-B_3)>0$$

由 Hurwitz 判据可得特征方程的根的实部均为负，因此系统(2)在地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。　证毕

下面讨论当 $R_0>1,\tau>0$ 时系统(2)在地方病平衡点 E^* 的根的情况。

当 $R_0>1,\tau>0$ 时，得到系统(2)在地方病平衡点 E^* 的特征方程：

$$\lambda^3+C_1\lambda^2+C_2\lambda+C_3+(C_4\lambda^2+C_5\lambda+C_6)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0 \tag{6}$$

其中

$$C_1=d+\sigma+d+\alpha_1+(p+d)R_0,$$
$$C_2=(d+\sigma)(d+\alpha_1)+(p+d)R_0(d+\sigma+d+\alpha_1)-(d+\sigma)(d+\alpha_1+\delta),$$
$$C_3=(p+d)R_0(d+\sigma)(d+\alpha_1)-(d+\sigma)(p+d)(d+\alpha_1+\delta),$$
$$C_4=\delta,C_5=(d+\sigma+(p+d)R_0)\delta,C_6=(p+d)R_0(d+\sigma)\delta$$

设 $\lambda=\mathrm{i}w(w>0)$ 是方程(6)的一个根，分离实虚部并解得

$$w^6+D_1w^4+D_2w^2+D_3=0$$

其中

$$D_1=C_1^2-2C_2-C_4^2,D_2=C_2^2-2C_1C_3+2C_4C_6-C_5^2,D_3=C_3^2-C_6^2$$

令 $z=w^2$，得到

$$Z^3+D_1Z^2+D_2z+D_3=0$$

记

$$h(z)=z^3+D_1z^2+D_2z+D_3=0 \tag{7}$$

引理 1[6,8]　对于多项式方程(7)有下列结果：

1)当 $D_3<0$，方程(7)至少有一个正实根；

2)当 $D_3\geqslant0,\Delta\leqslant0$ 时，方程(7)在 $z\in[0,+\infty)$ 上无正根；

3)当 $D_3\geqslant0,\Delta>0$ 时，方程(7)有正根当且仅当 $z_1>0,h(z_1)\leqslant0$。

不妨设(7)式有 3 个正根，设 $w_k=\sqrt{Z_k}$，$k=1,2,3$

记

$$\tau_k^j=\frac{1}{w_k}\arccos\frac{(C_1w_k^2-C_3)(C_6-C_4w_k^2)+C_5w_k^2(w_k^2-C_2)}{C_5^2w_k^2+(C_6-C_4w_k^2)^2}+\frac{2j\pi}{w_k},$$
$$k=1,2,3,j=0,1,2,\cdots$$

$\pm w\mathrm{i}$ 是方程(7)纯虚根，当 $\tau=\tau_k^j$，记

$$\tau_0=\tau_{k_0}^0=\min_{k=1,2,3}\{\tau_{k_j}^j\},w_0=w_k$$

方程(7)在 $0<\tau<\tau_0$ 时,地方病平衡点 E_* 处其特征值的实部均为负。

由引理 1,得到下面定理:

定理 4 1)当 $D_3\geqslant 0,\Delta\leqslant 0$ 时,方程(7)无正根,系统(2)在地方病平衡点 E^* 对所有的 $\tau>0$ 是局部渐近稳定的;

2)当 $D_3<0$ 或 $D_3\geqslant 0,\Delta>0,Z_1>0,h(Z_1)\leqslant 0$ 时,系统(2)在地方病平点 E^* 在 $\tau\in(0,\tau_0)$ 是局部渐近稳定的;在 $\tau>\tau_0$ 时是不稳定的。

3 结语

计算机的硬件技术、软件技术以及通信技术的不断发展,信息交换的日益频繁,计算机病毒的传播能力越来越强,破坏力也与日俱增。因此,计算机病毒的防治是计算机安全领域的重要课题,是长期而复杂的任务,深入研究计算机病毒传播原理,对计算机病毒的有效预防和控制提供理论基础。本文考虑了反病毒软件的使用、主动防御能力的局限性、手动查杀病毒需要的时间及对病毒进行隔离处理等因素,提出一种具有时滞的 SEIORS 计算机病毒动力学模型,借助于基本再生数理论并利用线性化方程理论对该模型进行分析,讨论了阈值 $R_0<1$ 时无病平衡点和 $R_0>1$ 时地方病平衡点在时滞 $\tau=0$ 及 $\tau>0$ 的局部稳定性情况,得出一些相应的理论结果。

参考文献:

[1] Kephart J O, White S R. Directed-graph epidemiological models of computer viruses[M]. Oakland, California, USA: IEEE Computer Society Press, 1991: 343-359.

[2] Han X, Tan Q. Dynamical behavior of computer virus on Internet[J]. Appl Math Comput, 2010, 217: 2520-2526.

[3] Mishra B K, Jha N. SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010(34): 710-715.

[4] Feng L P, Liao X F, Li H Q. Hopf bifurcation analysis of a delayed viral infection model in computer networks[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 56: 167-179.

[5] Mishra B K, Singh A K. Two quarantine models on the attack of malicious objects in computer network[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 58: 1-13.

[6] Dong T, Liao X, Li H. Stability andhopf bifurcation in a computer virus model with multistate antivirus[J]. Abstract and Applied Analysis, 2012(2012): 1-16.

[7] Yao Y, Xiang W, Qu A, et al. Hopf bifurcation in an SEIDQV worm propagation model with quarantine strategy [J]. Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012: 1-18.

[8] Song Y, Han M, Wei J. Stability and Hopf bifurcation analysis on a simplified BAM neural network with delays[J]. Physica D, 2005(200): 185-204.

Stability Analysis of a Class of SEIQRS Computer Virus Model with Time Delay

YANG Bin, YANG Zhichun

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: A class of SEIORS computer virus dynamics model with time delay is proposed when we concern with the characteristics of user computer, the prevention awareness for computer virus, anti-virus software via using the active defense ability, the time of killing the virus and isolating the virus and other factors. By means of the theory of basic reproduction number and linearization model of the characteristic equation, we investigate the stability of the disease-free equilibria and endemic equilibrium for the systems with time delay when $R_0<1$ and $R_0>1$, respectively.

Key words: computer virus model; time delay; stability

(责任编辑 游中胜)