2014 年 11 月　重庆师范大学学报(自然科学版)　Nov. 2014
第 31 卷 第 6 期　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　Vol. 31 No. 6

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140602

# 半 $E$-预不变凸模糊数值函数的判定*

张 贞[1,2]，刘学文[2]
(1. 广东实验中学南海学校，广东 佛山 528241；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

**摘要**:模糊凸性和模糊广义凸性在模糊数学中起着非常重要的作用。并且模糊数值函数是模糊分析学的重要组成部分，对它的研究在模糊数学的发展中有着举足轻重的地位。本文在模糊分析学的基础上进一步推广预不变凸模糊数值函数，利用新定义的模糊数值函数上、下半连续性，在一种新序意义下讨论了半 $E$-预不变凸模糊数值函数的若干判定定理。

**关键词**:半 $E$-预不变凸；模糊数值函数；上半连续；下半连续
**中图分类号**:O221.1　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-6693(2014)06-0005-04

## 1 预备知识

模糊凸性和模糊广义凸性在模糊优化理论中扮演着十分重要的角色。模糊数值函数是模糊分析学中的重要组成部分，所以对它的研究倍受人们的关注。关于模糊映射的凸性、拟凸性、及 $B$-凸性文献[1-3]已有讨论；文献[4]介绍了预不变凸模糊数值函数。文献[5]提出了 $E$-凸集和 $E$-凸函数的概念，并讨论了实值函数在 $E$-凸集上的广义凸性问题。文献[6]介绍了在上、下半连续条件下，模糊预不变凸映射的新准则。本文在文献[6]的基础上把凸性进行推广，利用模糊数值函数的上、下半连续性，讨论了半 $E$-预不变凸模糊数值函数的判定。

**定义 1**[7]　设 $\mathbf{R}$ 为实数集，若 $\mu$ 满足下面的性质：1) $\mu$ 是正则的，即 $[\mu]_1=\{x\in\mathbf{R};\mu(x)=1\}\neq\varnothing$；2) $\mu$ 是上半连续的；3) $\mu$ 是凸的，即 $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $\forall\lambda\in[0,1]$，有 $\mu(\lambda x+(1-\lambda)y)\pm\min\{\mu(x),\mu(y)\}$；4) $\mu$ 是支撑 $\mathrm{supp}(\mu)=\{x\in\mathbf{R};\mu(x)>0\}$ 和它的闭包 $\mathrm{cl}(\mathrm{supp}(\mu))$ 都是紧的；则称映射 $\mu:\mathbf{R}\to[0,1]$ 是一个模糊数。

**定理 1**[8]　若 $\mu\in\mathscr{F}$，则 $\mu_*(\alpha)$ 和 $\mu^*(\alpha)$ 为 $[0,1]$ 上的函数，且满足下面 4 个条件：1) $\mu_*(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上是非减函数，2) $\mu^*(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上是非增函数，3) $\mu_*(\alpha)$ 和 $\mu^*(\alpha)$ 是有界的，在 $(0,1]$ 上左连续，在 $\alpha=0$ 右连续，4) $\mu_*(\alpha)\leqslant\mu^*(\alpha)$。反之，如果函数 $\mu_*(\alpha)$ 和 $\mu^*(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上满足条件 1)～条件 4)，则存在一个模糊数 $\mu\in\mathscr{F}$ 使得 $[\mu]^\alpha=[\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha)]$ $(\alpha\in[0,1])$。记

$$V=\{(u_*(\alpha),u^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u_*:I\to\mathbf{R},u^*:I\to\mathbf{R}\text{ 是有界函数}\}；$$

$$\hat{V}=\{(u_*(\alpha),u^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u_*(\alpha),u^*(\alpha)\text{ 是 Lebesgue 可积的}\}；$$

$$\mathscr{F}=\{(u_*(\alpha),u^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u_*(\alpha)\text{ 单调不减},u^*(\alpha)\text{ 单调不增，均左连续且在 }\alpha=0\text{ 处右连续}\}$$

**定义 2**[8]　设 $\mu,\nu\in\hat{V}$，$\mu=\{(\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1\}$，$\nu=\{(\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1\}$，称 $\mu\leqslant\nu$，如果 $\int_0^1 f(\alpha)(\mu_*(\alpha)+\mu^*(\alpha))\mathrm{d}\alpha\leqslant\int_0^1 f(\alpha)(\nu_*(\alpha)+\nu^*(\alpha))\mathrm{d}\alpha$。

对于模糊数值函数 $F(x)=\{(F_*(\alpha),F^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1\}$，记 $T_{F(x)}=\int_0^1 f(\alpha)(F_*(\alpha)+F^*(\alpha))\mathrm{d}\alpha$，其中 $f$ 为 $[0,1]$ 上单调不减的非负函数，满足 $f(0)=1$ 且 $\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}$。$f$ 可以理解为权重函数，单调不减保证了越是接近模糊数的核的水平截集，在序关系的确定中作用越大。特别地，当 $f(\alpha)=\alpha$ 时，退化为文献[9]中的序关系。

**定义 3**[10]　设 $S(\subset\mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，若存在映射 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，对任意的 $x,y\in S$ 及 $\lambda\in[0,1]$，有 $E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y))\in S$，则称 $S$ 为 $E$-不凸集。显然，由定义可知 $E(S)\subseteq S$。

---

* **收稿日期**:2013-07-10　**修回日期**:2013-10-09　**网络出版时间**:2014-11-19 21:49
**资助项目**:国家自然科学基金项目(No. 11001289)；重庆市教委科研项目(No. KJ100608)
**作者简介**:张贞，女，研究方向运筹学与控制论，E-mail:396714001@qq.com；**通讯作者**:刘学文，E-mail:379405662@qq.com
**网络出版地址**:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.002.html

**定义4**[3] 设$S(\subset \mathbf{R}^n)$为开集,模糊数值函数$F:S\to\mathscr{F}$可以表示为$F(x)=\{(F_*(\alpha),F^*(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant 1)\}$。若$\frac{\partial}{\partial x_i}F^*(\alpha,x)$,$\frac{\partial}{\partial x_i}F_*(\alpha,x)(i=1,2,\cdots,n)$连续,则$F(x)$在$S$上可微,称$\nabla F(x)=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}F(x),\frac{\partial}{\partial x_2}F(x),\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}F(x)\right]$为$F(x)$的梯度。

**定义5** 设$F:S\to\mathscr{F}$为模糊数值函数,$S(\subset\mathbf{R}^n)$是关于$\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,若存在映射$E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,对任意的$x,y\in S$及$\lambda\in[0,1]$,有$E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y))\in S$,且$T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))}\preceq\lambda T_{F(x)}+(1-\lambda)T_{F(y)}$,则称$F$为半$E$-预不变凸模糊数值函数。

当$E(x)=x$且$E(y)=y$时,半$E$-预不变凸模糊数值函数退化成预不变凸模糊数值函数。

**定义6** 设$S$为$E$-不凸集,$F:S\to\mathscr{F}$为模糊数值函数,且$x_0\in S$,1) 若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得$\forall x\in S$且$\|x-x_0\|<\delta$时,$T_{F(E(x))}\preceq T_{F(E(x_0))}+\varepsilon$,则称$F$在$S$上上半连续;2) 若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得$\forall x\in S$且$\|x-x_0\|<\delta$时,$T_{F(E(x_0))}\preceq T_{F(E(x))}+\varepsilon$,则称$F$在$S$上下半连续。

**定义7** 设$S(\subset\mathbf{R}^n)$是关于$\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,称$\eta$满足条件C是指:对任意的$x,y\in S$及$t\in[0,1]$都满足条件:i) $\eta(E(y),E(y)+t\eta(E(x),E(y)))=-t\eta(E(x),E(y))$,ii) $\eta(E(x),E(y)+t\eta(E(x),E(y)))=(1-t)\eta(E(x),E(y))$。

## 2 主要结论

受文献[6]的启发,下面给出预不变凸模糊数值函数的判定定理。

**引理1** 设$F:S\to\mathscr{F}$为模糊数值函数,$S(\subset\mathbf{R}^n)$是关于$\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$的$E$-不变凸集,$\eta$满足条件C。$\forall x,y\in S$满足

$$T_{F(E(y)+\eta(E(x),E(y)))}\preceq T_{F(x)},T_{F(E(x)))}\preceq T_{F(x)}。\tag{1}$$

若存在$t\in(0,1)$,使得对$\forall x,y\in S$有$T_{F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))}\preceq tT_{F(E(x))}+(1-t)T_{F(E(y))}$,则集合$A=\{\lambda\in[0,1]\mid T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))}\preceq\lambda T_{F(x)}+(1-\lambda)T_{F(y)},\forall x,y\in S\}$在$[0,1]$上是稠密的。

**证明** 当$\lambda=0$时,有$T_{F(E(y)))}\leqslant T_{F(y)}$。当$\lambda=1$时,有$T_{F(E(y)+\eta(E(x),E(y)))}\leqslant T_{F(x)}$。易见$0,1\in A$。

假设$A$在$[0,1]$上不稠密,则存在$\lambda_0\in[0,1]$,使得

$$N(\lambda_0)\cap A=\varnothing。\tag{2}$$

定义

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in A\mid\lambda\geqslant\lambda_0\},\tag{3}$$

$$\lambda_2=\sup\{\lambda\in A\mid\lambda\leqslant\lambda_0\}。\tag{4}$$

由(2)式知$0\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant 1$,又$\{t,1-t\}\in(0,1)$,故可取$\mu_1,\mu_2\in A$且$\mu_1\geqslant\lambda_1$,$\mu_2\geqslant\lambda_2$,使得

$$\max\{t,1-t\}(\mu_1-\mu_2)<\lambda_1-\lambda_2,\tag{5}$$

则$\mu_2\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant\mu_1$。记$\bar\lambda=t\mu_1+(1-t)\mu_2$,由已知可得,对$\forall x,y\in S$有

$$E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))+t\eta(E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y)),E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y)))=E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))+t\eta(E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y)),E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y))-(\mu_1-\mu_2)\eta(E(x),E(y)))=E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))+$$

$$t\eta\left(E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y)),E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y))+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\eta(E(y),E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y)))\right)=$$

$$E(y)+\mu_2\eta\left(E(x),E(y))-t\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\eta(E(y),E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y))\right)=$$

$$E(y)+[\mu_2+t(\mu_1-\mu_2)]\eta(E(x),E(y))=E(y)+\bar\lambda\eta(E(x),E(y))。$$

由(1)式及$\mu_1,\mu_2\in A$知

$$T_{F(E(y)+\bar\lambda\eta(E(x),E(y)))}=T_{F(E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))+t\eta(E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y)),E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))))}\preceq tT_{F(E(y)+\mu_1\eta(E(x),E(y))+(1-t)T_{F(E(y)+\mu_2\eta(E(x),E(y))}}\preceq$$

$$t[\mu_1T_{F(E(x))}+(1-\mu_1)T_{F(E(y))}]+(1-t)[\mu_2T_{F(E(x))}+(1-\mu_2)T_{F(E(y))}]\preceq t[\mu_1T_{F(x)}+(1-\mu_1)T_{F(y)}]+$$

$$(1-t)[\mu_2T_{F(x)}+(1-\mu_2)T_{F(y)}]=\bar\lambda T_{F(x)}+(1-\bar\lambda)T_{F(y)},$$

因此$\bar\lambda\in A$。

若$\bar\lambda\geqslant\lambda_0$,由(5)式得$\bar\lambda-\mu_2=t(\mu_1-\mu_2)\leqslant\lambda_1-\lambda_2$,从而$\bar\lambda\leqslant\lambda_1$。这与(3)式矛盾;若$\bar\lambda\leqslant\lambda_0$,由(4)式得$\mu_1-\bar\lambda=(1-t)(\mu_1-\mu_2)\leqslant\lambda_1-\lambda_2$,从而$\bar\lambda\geqslant\lambda_2$。这与(4)式矛盾。故$A$在$[0,1]$上是稠密的。 证毕

**定理2** 设$F:S\to\mathscr{F}$为模糊数值函数,$S(\subset\mathbf{R}^n)$是关于$\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$的$E$-不变凸集,$\eta$满足条件C且$\|\eta\|\leqslant\infty$。$F$在$S$上上半连续且$\forall x,y\in S$满足$T_{F(E(y)+\eta(E(x),E(y)))}\preceq T_{F(x)}$,$T_{F(E(x)))}\preceq T_{F(x)}$,若存在$t\in(0,1)$,使得对$\forall x,y\in S$有$T_{F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))}\preceq tT_{F(x)}+(1-t)T_{F(y)}$,则$F$是半$E$-预不变凸的。

**证明**　假设 $F$ 不是半 $E$-预不变凸的,则存在 $x,y\in S,\bar{\lambda}\in(0,1)$,使得 $T_{F(E(y)+\bar{\lambda}\eta(E(x),E(y)))}>\bar{\lambda}T_{F(x)}+(1-\bar{\lambda})T_{F(y)}$。记 $Z=E(y)+\bar{\lambda}\eta(E(x),E(y))$,$A=\{\lambda\in[0,1]\mid T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))}\leq\lambda T_{F(x)}+(1-\lambda)T_{F(y)},\forall x,y\in S\}$,由引理 1 知 $A$ 在$[0,1]$中稠密,故存在序列$\{\lambda_n\}$,$\lambda_n\in A$ 使得 $\lambda_n\to\bar{\lambda}(n\to\infty)$。

定义 $E(y_n)=E(y)+\left(\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\eta(E(x),E(y))$,于是 $\|E(y_n)-E(y)\|=\left\|\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\eta(E(x),E(y))\right\|\to0(n\to\infty)$。因为 $S$ 是开不变凸集,所以当 $n$ 充分大时,有 $y_n\in S$。由条件 C,有

$$E(y_n)+\lambda_n\eta(E(x),E(y_n))=E(y)+\left(\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\eta(E(x),E(y))+\lambda_n\eta\left(E(x),E(y)+\left(\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\eta(E(x),E(y))\right)=$$

$$E(y)+\left(\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\eta(E(x),E(y))+\lambda_n\left[1-\left(\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\right]\eta(E(x),E(y))=E(y)+\lambda_n\eta(E(x),E(y))+$$

$$\left[\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}-\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\lambda_n\right]\eta(E(x),E(y))=E(y)+\bar{\lambda}\eta(E(x),E(y))=Z。$$

由 $F$ 在 $S$ 上的上半连续性知,$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,s. t. 当 $n>N$ 时,有 $T_{F(E(y_n))}\leq T_{F(E(y))}+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$,$n>N$,又 $\lambda_n\in A$,于是 $T_{F(Z)}=T_{F(E(y_n)+\lambda_n\eta(E(x),E(Y_n)))}\leq\lambda_n T_{F(x)}+(1-\lambda_n)T_{F(y_n)}\leq\lambda_n T_{F(x)}+(1-\lambda_n)T_{F(y)}+(1-\lambda_n)\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$。因为 $\varepsilon$ 是任意小的正数,所以当 $n\to\infty$时有 $F(Z)\leq\bar{\lambda}T_{F(x)}+(1-\bar{\lambda})T_{F(y)}$。这与假设矛盾,因此 $F$ 是半 $E$-预不变凸的。

证毕

**定理 3**　设 $F:S\to\mathscr{F}$ 为模糊数值函数,$S(\subset\mathbf{R}^n)$是关于 $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的非空 $E$-不变凸集,$\eta$ 满足条件 C 且 $\|\eta\|\leqslant\infty$。$F$ 在 $S$ 上下半连续且 $\forall x,y\in S$ 满足 $T_{F(E(y)+\eta(E(x),E(y)))}\leq T_{F(x)}$,$T_{F(E(x))}\leq T_{F(x)}$。若存在 $t\in(0,1)$,使得对 $\forall x,y\in S$ 有 $T_{F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))}\leq tT_{F(x)}+(1-t)T_{F(y)}$,则 $F$ 是半 $E$-预不变凸的。

**证明**　假设 $F$ 不是半 $E$-预不变凸的,则存在 $x,y\in S,\bar{\lambda}\in(0,1)$,使得 $T_{F(E(y)+\bar{\lambda}\eta(E(x),E(y)))}>\bar{\lambda}T_{F(x)}+(1-\bar{\lambda})T_{F(y)}$,记 $E(x_t)=E(y)+t\eta(E(x),E(y))$,$t\in(\bar{\lambda},1]$,$B=\{x_t\in S\mid t\in(\bar{\lambda},1],T_{F(E(x_t))}=T_{F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))}\leq tT_{F(x)}+(1-t)T_{F(y)}\}$,$\mu=\inf\{t\in(\bar{\lambda},1]\mid x_t\in B\}$易见,$x_1\in B$,$x_{\bar{\lambda}}\notin B$,那么由实数的稠密性和下确界的定义,有 $x_t\notin B$,$\bar{\lambda}\leqslant t<u$,且存在数列$\{t_n\}$,$t_n\geqslant u$,$x_{t_n}\in B$ 使得,$t_n\to u$,$n\to\infty$。所以

$$\|E(x_u)-E(x_{t_n})\|=\|E(y)+u\eta(E(x),E(y))-E(y)-t_n\eta(E(x),E(y))\|=|u-t_n|\,\|\eta(x,y)\|\to\infty,n\to\infty。$$

由于 $F$ 在 $S$ 上是下半连续的,因此 $T_{F(E(x_\mu))}\leq T_{F(E(x_{t_n}))}+\varepsilon\leq t_nT_{F(x)}+(1-t_n)T_{F(y)}+\varepsilon$。因为 $\varepsilon$ 是任意小的正数,当 $n\to\infty$,因此 $T_{F(E(y)+\mu\eta(E(x),E(y)))}\leqslant\mu T_{F(x)}+(1-\mu)T_{F(y)}$。因此 $x_u\in B$。

同理,记

$$E(y_t)=E(y)+t\eta(E(x),E(y)),t\in[0,\bar{\lambda}),$$

$$D=\{y_t\in S\mid t\in[0,\bar{\lambda}),T_{F(E(y_t))}=T_{F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))}\leq tT_{F(x)}+(1-t)T_{F(y)}\},$$

$$\nu=\sup\{t\in[0,\bar{\lambda})\mid y_t\in D\}。$$

易见,$y_0\in D$,$y_{\bar{\lambda}}\notin D$,那么 $y_t\notin D$,$\nu<t\leqslant\bar{\lambda}$,且存在$\{t_n\}$,$t_n\leqslant\nu$,$y_{t_n}\in D$,使得 $t_n\to\nu$,$n\to\infty$,所以

$$\|E(y_\nu)-E(y_{t_n})\|=\|E(y)+\nu\eta(E(x),E(y))-E(y)-t_n\eta(E(x),E(y))\|=|\nu-t_n|\,\|\eta(x,y)\|\to\infty,n\to\infty。$$

由于 $F$ 在 $S$ 上是下半连续的,因此 $T_{F(E(y_n))}\leq T_{F(E(y_{t_n}))}+\varepsilon\leq t_nT_{F(x)}+(1-t_n)T_{F(y)}+\varepsilon$。因为 $\varepsilon$ 是任意小的正数,当 $n\to\infty$,因此 $T_{F(E(y)+\nu\eta(E(x),E(y)))}\leq\nu T_{F(x)}+(1-\nu)T_{F(y)}$。因此 $y_\nu\in D$。

由 $\mu,\nu$ 的定义知,$0\leqslant\nu<\bar{\lambda}<\mu\leqslant1$。根据条件 i)和条件 ii),对 $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$E(x_u)+\lambda\eta(E(y_\nu),E(x_\mu))=E(y)+\mu\eta(E(x),E(y))+\lambda\eta(E(y)+\nu\eta(E(x),E(y)),E(y)+\mu\eta(E(x),E(y)))=$$

$$E(y)+\mu\eta(E(x),E(y))+\lambda\eta(E(y)+\nu\eta(E(x),E(y)),E(y)+\nu\eta(E(x),E(y))+(\mu-\nu)\eta(E(x),E(y)))=$$

$$E(y)+\mu\eta(E(x),E(y))+\lambda\eta(E(y)+\nu\eta(E(x),E(y)),E(y)+\nu\eta(E(x),E(y))+\frac{\mu-\nu}{\nu}\eta(E(y),E(y)+$$

$$\nu\eta(E(x),E(y))))=E(y)+\mu\eta(E(x),E(y))-\lambda\frac{\mu-\nu}{\nu}\eta(E(y),E(y)+\nu\eta(E(x),E(y))))=E(y)+$$

$$\mu\eta(E(x),E(y))+\lambda(\nu-\mu)\eta(E(x),E(y))=E(y)+[\mu+\lambda(\nu-\mu)]\eta(E(x),E(y))=E(y)+$$

$$[\lambda\nu+(1-\lambda)\mu]\eta(E(x),E(y))。$$

由 $\mu,\nu$ 的定义,对 $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$T_{F(E(x_u)+\lambda\eta(E(y_\nu),E(x_\mu)))}=T_{F(E(y)+[\lambda\nu+(1-\lambda)\mu]\eta(E(x),E(y)))}>[\lambda\nu+(1-\lambda)\mu]T_{F(x)}+[1-\lambda\nu-(1-\lambda)\mu]T_{F(y)}=$$

$$\lambda[\nu T_{F(x)}+(1-\nu)T_{F(y)}]+(1-\lambda)[\mu T_{F(x)}+(1-\mu)T_{F(y)}]\pm\lambda T_{F(y_\nu)}+(1-\lambda)T_{F(x_\mu)}$$

这与已知矛盾，因此 $F$ 是半 $E$-预不变凸的。　　证毕

**定理 4**　设 $F:S\to\mathscr{F}$ 为模糊数值函数，$S(\subset\mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的 $E$-不变凸集，$\eta$ 满足条件 C 且 $F$ 可微，且 $\forall x,y\in S$ 满足 $T_{F(E(x))}-T_{F(E(y))}\pm T_{\nabla F(y)\eta(E(x),E(y))}$，$T_{F(E(x)))}\leq T_{F(x)}$，则 $F$ 是半 $E$-预不变凸的。

**证明**　设 $x,y\in S,\lambda\in(0,1),E(\overline{y})=E(y)+\lambda\eta(E(x,E(y)))$，则 $\overline{y}\in S$。由于 $F$ 可微且满足

$$T_{F(E(y))}-T_{F(E(\overline{y}))}\pm T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(y),E(\overline{y}))},\ T_{F(E(x))}-T_{F(E(\overline{y}))}\pm T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(\overline{y}))}$$

于是
$$\lambda T_{F(E(x))}+(1-\lambda)T_{F(E(y))}\pm\lambda T_{F(E(\overline{y}))}+\lambda T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(\overline{y}))}+(1-\lambda)T_{F(E(\overline{y}))}+(1-\lambda)T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(y),E(\overline{y}))}=$$
$$T_{F(E(\overline{y}))}+\lambda T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(\overline{y}))}+(1-\lambda)T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(y),E(\overline{y}))}。$$

由于 $\eta$ 满足条件 C，所以 $\eta(E(x),E(\overline{y}))=\eta(E(x),E(y)+\lambda\eta(E(x,E(y)))=(1-\lambda)\eta(E(x),E(y))$，$\eta(E(y),E(\overline{y}))=\eta(E(y),E(y)+\lambda\eta(E(x,E(y)))=-\lambda\eta(E(x),E(y))$。

由于
$$\lambda T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(\overline{y}))}+(1-\lambda)\lambda T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(y),E(\overline{y}))}=\lambda T_{\nabla F(\overline{y})(1-\lambda)\eta(E(x),E(y))}+(1-\lambda)T_{\nabla F(\overline{y})(-\lambda)\eta(E(x),E(y))}=$$
$$\lambda(1-\lambda)T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(y))}-\lambda(1-\lambda)T_{\nabla F(\overline{y})\eta(E(x),E(y))}=0。$$

从而
$$\lambda T_{F(x)}+(1-\lambda)T_{F(y)}\geq T_{F(\overline{y})}\geq T_{F(E(\overline{y}))}=T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x,E(y))))}。$$

由于 $T_{F(E(x)))}\leq T_{F(x)}$，$T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))}\leq\lambda T_{F(E(x))}+(1-\lambda)T_{F(E(y))}\leq\lambda T_{F(x)}+(1-\lambda)T_{F(y)}$，则 $F$ 是半 $E$-预不变凸的。　　证毕

**参考文献：**


[1] Nanda S, Kar K. Convex fuzzy mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 48(1): 129-132.

[2] Syau Y R. Generalization of preinvex and *B*-vex fuzzy mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(3): 533-542.

[3] Panigrahi, Panda G, Nanda S. Convex fuzzy mappings with differentiability and its application in fuzzy optimization [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 185 (1): 47-62.

[4] Noor M A. Fuzzy preinvex functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(1): 95-104.

[5] Youness E A. *E*-convex sets, *E*-convex function, and *E*-convex programming[J]. European Journal of Operational Theory and Applications, 1999, 102(2): 439-450.

[6] Wu Z Z, Xu J P. Generalization convex fuzzy mappings and fuzzy variational-like inequality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(11): 1590-1619.

[7] Zadeh L A. Fuzzy set[J]. Inform and Control, 1965, 8(3): 338- 353.

[8] 吴从炘，马明. 模糊分析学基础[M]. 北京：国防工业出版社. 1991.
Wu C X, Ma M. Fuzzy analysis foundation[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1991.

[9] Goetschel J R, Voxman W. Elementary fuzzy calculus[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18(1): 31-43.

[10] Fulga C, Preda V. Nonlinear programming with *E*-preinvex and local *E*-preinvex function[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(3): 737-743.


**Operations Research and Cybernetics**

## Semi-*E*-preinvex Fuzzy-valued Functions Judge Theorems


ZHANG Zhen[1,2], LIU Xuewen[2]

(1. Guangdong Experimental Nanhai School, Foshan Guangdong 528241;
2. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)



**Abstract**: Fuzzy convexity and fuzzy generalized convexity play a very important role in fuzzy optimization theory. Fuzzy-valued functions is important parts of Fuzzy analysis, Research on it has holds an important place in the development of fuzzy mathematics. In this paper, on the basis of fuzzy analysis further promote constant convex fuzzy-valued function. This paper based on the ordering of new fuzzy numbers proposed by Goetschel, the definition of upper (lower) semicontinuity of fuzzy-valued function is given, and some judge theorems are obtained.



**Key words**: semi-*E*-preinvex; fuzzy-valued functions; upper semicontinuity; lower semicontinuity.



(责任编辑　方　兴)