运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140603

基于加权总完工时间的两人合作排序博弈*

邱言玲, 高淑萍, 张宝玉
(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要:现实活动中,往往存在一方无法独自完成一个项目中全部工件加工任务的情况,这就需要双方或者多方合作共同完成任务。假设每人有一台用于加工工件的机器,通过确定这批工件的一个恰当划分,把工件分配给两台机器,使得双方合作收益最大。本文研究当工件加工时间是其开工时间线性恶化函数,以最小的加权总完工时间作为加工成本,建立两人合作排序博弈模型。通过运用 Matlab 软件,分析不同的盈利能力和机会成本对最优解的影响,并与以总完工时间作为加工成本的模型进行比较,表明本文模型在盈利能力不强以及恶化因子小的情况下都可以求得最优解。

关键词:排序博弈;线性恶化;加权总完工时间

中图分类号:O221.7 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)06-0009-07

经典的排序问题,是指为加工若干个工件(Job),对工件及其所需要的机器(Machine)按时间进行分配和安排,所有的工件均由一个“人”(一个自然人或者是某一个集体)完成,在完成所有工件加工时,使得某个(些)目标为最优[1]。然而,由于资金、技术、规模及时间等的限制,一个“人”往往无法独立承担所有工件的加工任务,因此需要两“人”或者多“人”合作完成:即对工件进行合理的划分,确定使得各方都满意的分配方案,这就是排序博弈问题。中文术语“排序博弈”是 2011 年由金霁等[2]提出的。

陈全乐[3]博士首先对两人合作加工工件的整数化离散合作博弈模型进行研究,合作收益乘积最大化作为优化的目标,引入纳什博弈解[4-5](Nash bargaining solution,NBS),即只要此问题存在一个帕累托有效(Pareto efficient)可行分配方案子集,就可以在这个子集中找到某一个或某一些相对合理的最终利益分配方案(集)。之后,又有学者对两人合作排序博弈进行了研究[2,6-12],根据加工时间的不同,大致分为 3 类:1)所有工件加工时间均相同的排序博弈问题[2,6],分别以最小的最大完工时间和最小的总完工时间作为加工成本,分析了问题的可行解取值范围,并对博弈解的存在性进行了证明;2)工件加工时间不相同的排序博弈问题[7-10],如文献[7]考虑合作双方在协商确定工件划分方案时影响力不等同的情况,证明了当合作收益函数与工件的排序无关时,该问题等价于背包问题;3)工件加工时间是其开始加工时间线性函数的排序博弈问题[11-13],分别以最小的最大完工时间和最小的总完工时间作为加工成本,给出了双方都满意的工件划分方案。

但在现实生活中,不同工件的加工时间往往是与其开始加工时间有关的,发生火灾时,开始救火的时间越晚,那么救火工作的难度就越大,花的时间就越长[14]。工厂里用刀具切割工件时,切割的工件越多刀具越不锋利,越晚切割的工件的切割时间也就越长。可见,工件的加工时间是随着其开始加工时间的推移而变长的,这种现象被称作“工件加工时间的恶化现象”,简称“恶化”或“退化”。这种现象广泛存在于钢铁、塑料工业以及医疗等领域。因此,对它的研究有着积极的现实意义[15-19]。

对于工件的加工时间线性恶化的问题,不同工件加工时间不相同,则各个工件的完工时间对加工成本的影响能力不同,如果单纯的考虑最小总完工时间作为加工成本就忽略了不同工件因加工时间不同带来的差异性。因此,本文建立以最小的加权总完工时间作为加工成本的排序博弈模型,分析了目标函数可行解的取值情况,针对不同盈利能力以及不同恶化因子等参数,求出模型的最优解以及博弈解,并通过 Matlab 软件进行计算。将本文模型与以最小的总完工时间作为加工成本的模型进行对比,解决了后者在双方盈利能力都不高时无法取得最优解的问题,表明本文模型的适用性广。

* 收稿日期:2014-08-30 修回日期:2014-09-11 网络出版时间:2014-11-19 21:49
作者简介:邱言玲,女,研究方向为排序博弈最优化,E-mail:wave.andsmile@163.com;通讯作者:高淑萍,E-mail:gaosp@mail.xidian.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.003.html

1 问题描述

设有工件集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$,所有工件有相同的就绪时间 $t_0(\geqslant 0)$,即所有工件可以开始加工的时间为 t_0。工件 j 的加工时间 p_j 是关于其开始加工时间 t_j 的线性恶化函数:$p_j=p_0+\alpha t_j(\alpha>0)$,其中 α 是恶化因子,表示加工时间随开始加工时间变化的快慢程度;p_0 是工件的基本加工时间。每个工件只需加工一次,且不可中断。两人合作共同加工这 n 个工件,每人有一台机器,因为工件加工时间只与其开始加工的"位置"有关,所以划分工件集只需考虑每个集合中工件的个数,集合确定后,由于加工时间的特殊性,工件的任意排序都是按照加工时间非减顺序排列的,因此把工件集划分成两个互不相交的集合,记为 $X_1=\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $X_2=\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$,分别由两个人加工。每加工单位时间的工件会使第 i 人获得 b_i 个单位的收益,本文以最小的加权总完工时间作为加工成本,则第 i 人的收益函数可以表示为

$$u_i=u_i(k)=b_i\sum_{j\in X_i}p_j-\min\sum_{j\in X_i}\lambda_j^iC_j(i=1,2)\ ,$$

其中 $\lambda_j^i,i=1,2,\ j=1,2,\cdots,n$ 表示工件 j 在第 i 台机器上的权重,C_j 表示工件 j 的完工时间,则合作收益函数可以表示为 $v_i(k)=u_i(k)-e_i(i=1,2)$,$e_i(i=1,2)$ 表示第 i 人的机会成本,即第 i 人不参与这次合作而参加别的商业活动所能获得的最低收益。假设 p_0、e_i 都取正整数,t_0、b_i 取非负整数。按照文献[2]的三参数表示法,此问题可以表示为 $G2\mid p_j=p_0+\alpha t_j\mid v_1v_2\Big/\sum\lambda_jC_j$,其中 $G2$ 表示是两台机器合作排序博弈,$p_j=p_0+\alpha t_j$ 表示工件的加工时间是关于其开始加工时间的线性恶化函数,$v_1v_2\Big/\sum\lambda_jC_j$ 表示加工成本是加权的总完工时间,目标是求两人合作收益乘积最大。此问题的合作排序博弈的模型也可表示为:

$$\begin{cases}\max\ v_1(k)v_2(k)\\ \text{s.t.}\ \ v_1(k)>0,v_2(k)>0\end{cases}\text{。}\tag{1}$$

对问题(1),若求得某个 $k^*\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,使得 $v_1(k^*)v_2(k^*)=\max\{v_1(k)v_2(k)\mid v_1(k),v_2(k)>0\}$,则 $(v_1(k^*),v_2(k^*))$ 是纳什博弈解,$k^*\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 是最优解。

2 问题求解

工件的加工时间 $p_j=p_0+\alpha t_j(\alpha>0)$,开始加工时间越晚,加工时间越长,完工时间也越大,不同工件因为加工时间的不同对成本函数的影响不同。基于这一考虑,以工件的加权总完工时间作为加工成本,权重 λ_j^i 则是工件 j 的加工时间占其所在机器 i 上最大完工时间的比值,即 $\lambda_j^i=\dfrac{p_j}{\sum\limits_{j\in X_i}p_j}(i=1,2)$。

由于工件的加工时间以及完工时间分别可以表示为:

$$p_1=p_0+\alpha t_0,C_1=t_0+p_1=p_0+(1+\alpha)t_0;$$

$$p_2=p_0+\alpha C_1=(1+\alpha)(p_0+\alpha t_0),C_2=C_1+p_2=p_0+(1+\alpha)p_0+(1+\alpha)^2t_0;$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_k=p_0+\alpha C_{k-1}=(1+\alpha)^{k-1}(p_0+\alpha t_0),\ C_k=C_{k-1}+p_k=p_0+(1+\alpha)p_0+\cdots+(1+\alpha)^{k-1}p_0+(1+\alpha)^kt_0=$$
$$\sum_{i=1}^{k}(1+\alpha)^{i-1}p_0+(1+\alpha)^kt_0=\frac{p_0}{\alpha}((1+\alpha)^k-1)+(1+\alpha)^kt_0;$$

$$p_{k+1}=p_0+\alpha t_0,C_{k+1}=t_0+p_{k+1}=p_0+(1+\alpha)t_0;$$

$$p_{k+2}=p_0+\alpha C_{k+1}=(1+\alpha)(p_0+\alpha t_0),C_{k+2}=C_{k+1}+p_{k+2}=p_0+(1+\alpha)p_0+(1+\alpha)^2t_0;$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_n=p_0+\alpha C_{n-1}=(1+\alpha)^{n-k-1}(p_0+\alpha t_0),C_n=C_{n-1}+p_n=p_0+(1+\alpha)p_0+\cdots+$$
$$(1+\alpha)^{n-k-1}p_0+(1+\alpha)^{n-k}t_0=\sum_{i=1}^{n-k}(1+\alpha)^{i-1}p_0+(1+\alpha)^{n-k}t_0=\frac{p_0}{\alpha}((1+\alpha)^{n-k}-1)+(1+\alpha)^{n-k}t_0\text{。}$$

所以权重系数 $$\lambda_j^1=\frac{p_j}{\sum\limits_{j\in X_1}p_j}=\frac{\alpha p_j}{(p_0+\alpha t_0)((1+\alpha)^k-1)}=\frac{\alpha(1+\alpha)^{j-1}}{(1+\alpha)^k-1},\ j=1,2,\cdots,k\ ,$$

$$\lambda_j^2=\frac{p_j}{\sum\limits_{j\in X_2}p_j}=\frac{\alpha\,(1+\alpha)^{j-k-1}}{((1+\alpha)^{n-k}-1)},\ j=k+1,k+2,\cdots,n\ 。$$

则
$$u_1(k)=b_1\sum_{j\in X_1}p_j-\sum_{j\in X_1}\lambda_j^1C_j=\frac{b_1(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}((1+\alpha)^k-1)-\frac{(1+\alpha)(p_0+\alpha t_0)}{(1+\alpha)^2-1}((1+\alpha)^k+1)+\frac{p_0}{\alpha}=$$
$$\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_1-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)(1+\alpha)^k-\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_1+\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}-\frac{p_0}{p_0+\alpha t_0}\right)。$$

同理得到
$$u_2(k)=\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_2-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)(1+\alpha)^{n-k}-\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_2+\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}-\frac{p_0}{p_0+\alpha t_0}\right),$$

$$v_1(k)=u_1(k)-e_1=\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_1-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)((1+\alpha)^k-A),\tag{2}$$

$$v_2(k)=u_2(k)-e_2=\frac{(p_0+\alpha t_0)}{\alpha}\left(b_2-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)((1+\alpha)^{n-k}-B)。\tag{3}$$

其中
$$A=\frac{1}{b_1((1+\alpha)^2-1)-\alpha(1+\alpha)}\left(\left(b_1-\frac{p_0-\alpha e_1}{p_0+\alpha t_0}\right)((1+\alpha)^2-1)+\alpha(1+\alpha)\right),$$
$$B=\frac{1}{b_2((1+\alpha)^2-1)-\alpha(1+\alpha)}\left(\left(b_2-\frac{p_0-\alpha e_2}{p_0+\alpha t_0}\right)((1+\alpha)^2-1)+\alpha(1+\alpha)\right)。$$

因为参数 p_0、e_i 都取正整数，b_i 取非负整数，$\alpha>0$，$t_0\geqslant 0$，为了符合实际，必须满足随着加工工件个数的增加，每人的收益是增加的，即要求幂次项的系数是正的，所以 $b_i>\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}$，$i=1,2$，又因为 $0<\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}<1$，要想满足合作收益大于 0，必须有 $b_i>1$，$i=1,2$。且

$$A=\frac{1}{b_1((1+\alpha)^2-1)-\alpha(1+\alpha)}\left(\left(b_1-\frac{p_0-\alpha e_1}{p_0+\alpha t_0}\right)((1+\alpha)^2-1)+\alpha(1+\alpha)\right)>$$
$$\frac{1}{b_1((1+\alpha)^2-1)-\alpha(1+\alpha)}((b_1-1)((1+\alpha)^2-1)+\alpha(1+\alpha))=\frac{b_1\alpha^2+(2b_1-1)\alpha}{(b_1-1)\alpha^2+(2b_1-1)\alpha}>1。$$

同理有 $B>1$。

则合作收益的乘积

$$v_1(k)v_2(k)=\frac{(p_0+\alpha t_0)^2}{\alpha^2}\left(b_1-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)\left(b_2-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)((1+\alpha)^k-A)((1+\alpha)^{n-k}-B)=$$
$$M((1+\alpha)^k-A)((1+\alpha)^{n-k}-B)=M((1+\alpha)^n+AB)-M(B\,(1+\alpha)^k+A\,(1+\alpha)^{n-k})。\tag{4}$$

其中 $M=\frac{(p_0+\alpha t_0)^2}{\alpha^2}\left(b_1-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)\left(b_2-\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2-1}\right)>0$。

为方便叙述，令 $\beta_1=\frac{\ln A}{\ln(1+\alpha)}$，$\beta_2=n-\frac{\ln B}{\ln(1+\alpha)}$，因为 $A>1$，$B>1$，所以 $\beta_1>0$，$\beta_2<n$。

定理 1　问题(1)有正整数解 k 的充要条件是 $\beta_l\leqslant\beta_r$，其中 $\beta_l=\lfloor\beta_1\rfloor+1$，$\beta_r=\lceil\beta_2\rceil-1$，这里$\lfloor\ \rfloor$表示向下取整，$\lceil\ \rceil$表示向上取整。

证明　必要性。因为两人要合作，所以必须满足合作收益 $v_i(k)>0$，$i=1,2$，又 $f(x)=(1+\alpha)^x$ 是关于 x 的增函数(已知 $\alpha>0$)，从而根据参数的取值以及(2)式可得 $v_1(k)>0$ 等价于$(1+\alpha)^k-A>0$，即 $k>\frac{\ln A}{\ln(1+\alpha)}=\beta_1$，同理根据(3)式有 $k<n-\frac{\ln B}{\ln(1+\alpha)}=\beta_2$，所以有 $\beta_1<k<\beta_2$，且满足 $1\leqslant k\leqslant n-1$，所以

$$0\leqslant\beta_1<n-1,1<\beta_2\leqslant n,\beta_1<\beta_2,n\geqslant 2,\beta_1<k<\beta_2,\tag{5}$$

即 $k\in(\beta_1,\beta_2)\cap\{1,2,\cdots,n-1\}$，于是得到 $\beta_l\leqslant\beta_r$。

充分性。如果 $\beta_l\leqslant\beta_r$，存在一个正整数 k，使得 $\beta_l\leqslant k\leqslant\beta_r$，因为 $\beta_l=\lfloor\beta_1\rfloor+1$，$\beta_r=\lceil\beta_2\rceil-1$，可以得到 $\beta_1<k<\beta_2$，且根据(2)、(3)式有 $v_1(k)>0$，$v_2(k)>0$，又因为 $1\leqslant k\leqslant n-1$，所以排序博弈问题(1)有解。　　证毕

当参数 b_i、$e_i(i=1,2)$、t_0、p_0、α 以及 n 都给定时，有

$$v_1(k)v_2(k)=M((1+\alpha)^n+AB)-M(B\,(1+\alpha)^k+A\,(1+\alpha)^{n-k}),$$

上式中的第一项是常数，令 $\varphi(k)=B\,(1+\alpha)^k+A\,(1+\alpha)^{n-k}$，只要使 $\varphi(k)$最小，就有目标函数 $v_1(k)v_2(k)$最大。

因为 $B\,(1+\alpha)^k>0$，$A\,(1+\alpha)^{n-k}>0$，所以根据均值不等式，有

$$\varphi(k)=B\,(1+\alpha)^{k}+A\,(1+\alpha)^{n-k}\geqslant 2\sqrt{AB\,(1+\alpha)^{n}}\,(\text{定值}) \tag{6}$$

当且仅当 $B\,(1+\alpha)^{k}=A\,(1+\alpha)^{n-k}$ 时,即 $k=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ 时,$\varphi(k)$ 取到最小值 $2\sqrt{AB\,(1+\alpha)^{n}}$。

事实上,$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ 未必是整数,故令 $\beta=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$,且由(5)式知

$$\frac{1}{2}<\beta<n-\frac{1}{2} \tag{7}$$

由定理1不难得到下面定理2。

定理2 若排序博弈问题(1)存在正整数解,则其最优解(集)为:

a) 若 $\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=1$。

b) 若 $1<\beta<n-1$,当 β 为整数时,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\beta$;否则若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)<\varphi(\lceil\beta\rceil)$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\beta\rfloor$;若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)>\varphi(\lceil\beta\rceil)$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lceil\beta\rceil$;若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)=\varphi(\lceil\beta\rceil)$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\beta\rfloor$ 或 $k^*=\lceil\beta\rceil$。

c) 若 $n-1<\beta\leqslant n-\frac{1}{2}$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=n-1$。

3 算例分析

针对本文提出的加权总完工排序博弈问题,通过Matlab软件,分别针对不同的盈利能力 b_1、b_2,机会成本 e_1、e_2,恶化率 α 等参数进行了计算,结果如表1所示。

实验1 工件个数 $n=20$,$t_0=1$,$p_0=1$,恶化率 $\alpha=0.2$ 时,针对不同的盈利能力和机会成本,加权总完工时间排序博弈问题最优解及纳什博弈解如表1。

表1 $\alpha=0.2$ 的最优解 k^* 及纳什博弈解

Tab. 1 The optimal solution k^* and the Nash bargaining solution of $\alpha=0.2$

b_1	b_2	e_1	e_2	k^*	$v_1(k^*)v_2(k^*)$	$(v_1(k^*),v_2(k^*))$
3	2	0	0	10	3.278 6e+003	(74.914 7,43.764 2)
3	2	20	50	7	546.127 8	(16.497 8,33.103 2)
3	2	50	20	11	636.842 9	(43.152 1,14.758 1)
3	2	15	30	8	1.203 2e+003	(32.051 8,37.540 5)
3	2	30	15	10	1.291 9e+003	(44.914 7,28.764 2)
3	5	0	0	10	1.027 9e+004	(74.914 7,137.215 5)
3	5	20	50	10	4.789 4e+003	(54.914 7,87.215 5)
3	5	50	20	13	4.336 3e+003	(91.299 1,47.495 9)
3	5	15	30	10	6.423 8e+003	(59.914 7,107.215 5)
3	5	30	15	12	6.092 9e+003	(85.037 1,71.649 7)
7	8	0	0	10	3.225 9e+004	(167.096 9,193.055 6)
7	8	20	50	9	2.153 1e+004	(113.792 9,189.212 2)
7	8	50	20	11	2.113 9e+004	(157.061 8,134.591 8)
7	8	15	30	9	2.485 3e+004	(118.792 9,209.212 2)
7	8	30	15	11	2.471 6e+004	(177.061 8,139.591 8)
3	8	0	0	10	1.221 3e+004	(63.262 2,193.055 6)
3	8	20	50	10	6.188 9e+003	(43.262 2,143.055 6)
3	8	50	20	13	5.200 5e+003	(68.582 6,75.827 6)
3	8	15	30	11	7.906 6e+003	(63.460 1,124.591 8)
3	8	30	15	12	7.172 6e+003	(66.697 6,107.538 6)

分析表1,可以得到:

a) 当合作双方的盈利能力差距不大(例 b_1、b_2 分别为3、2或7、8)时,机会成本偏高的一方往往被划分更多

的加工工件，这样，才能使合作收益乘积最大，保持联盟的稳定性；

b）当合作双方的盈利能力差距较大（例 b_1、b_2 分别为 3、8）时，盈利能力低的一方被分配更多的工件，这样，确保了盈利能力低的一方不会因为收益过低而拒绝合作。

实验 2　工件个数 $n=20$，$t_0=1$，$p_0=1$，恶化率 $\alpha=0.6$ 时，针对不同的盈利能力和机会成本，加权总完工时间排序博弈问题最优解及纳什博弈解如表 2。

表 2　$\alpha=0.6$ 的最优解 k^* 及纳什博弈解

Tab. 2　The optimal solution k^* and the Nash bargaining solution of $\alpha=0.6$

b_1	b_2	e_1	e_2	k^*	$v_1(k^*)v_2(k^*)$	$(v_1(k^*), v_2(k^*))$
3	2	0	0	10	2.769 4e+005	(691.202 3,400.665 8)
3	2	20	50	9	2.430 5e+005	(409.011 0,594.249 9)
3	2	50	20	10	2.440 8e+005	(641.202 3,380.665 8)
3	2	15	30	9	2.543 1e+005	(414.011 0,614.249 9)
3	2	30	15	10	2.550 0e+005	(661.202 3,385.665 8)
3	2	200	300	9	7.883 7e+004	(229.011 0,344.249 9)
3	2	300	200	10	7.850 1e+004	(391.202 3,200.665 8)
3	8	0	0	10	5.799 6e+005	(432.626 4,1.340 6e+003)
3	8	20	50	10	5.325 2e+005	(412.626 4,1.290 6e+003)
3	8	50	20	12	5.278 2e+005	(1.064 3e+003,495.919 1)
3	8	15	30	10	5.473 2e+005	(417.626 4,1.310 6e+003)
3	8	30	15	11	5.438 8e+005	(664.817 7,818.085 9)
3	8	200	300	11	2.637 8e+005	(494.817 7,533.085 9)
3	8	300	200	12	2.572 6e+005	(814.323 6,315.919 1)

对比表 1 和表 2，可以得到：当恶化因子 α 较小时，各个工件加工时间的差异相对较小，合作双方要加工的工件数差异较大；当恶化因子 α 较大时，各个工件加工时间的差异相对较大，合作双方要加工的工件数差异较小。

所以，当恶化因子 α 较小，可以运用本文所建立模型找到两人排序博弈的最优解。如果恶化因子 α 偏大，根据本文的模型，则倾向于双方平分需要加工的工件。

实验 3　工件个数 $n=20$，$t_0=1$，$p_0=1$，恶化率 $\alpha=0.2$ 以及 $\alpha=0.6$ 时，针对不同的盈利能力和机会成本，金霁[13]的总完工时间排序博弈问题最优解及纳什博弈解如表 3。

对比实验 2 与实验 3 结果：

a）从表 3 可知，当合作双方的盈利能力较小时，使用文献[13]模型往往得不到最优解，特别当双方的机会成本都是 0 时，双方合作利益差距巨大，不利于联盟的稳定性；

b）将表 2 与表 3 进行比较，根据本文模型得到的最优值，盈利能力强的一方所得收益明显比文献[13]模型的结果大，这样就在保证盈利能力弱的一方收益的同时，充分考虑了盈利能力高的一方的收益；

c）表 3 显示，当恶化因子 α 较小时，以总完工时间作为加工成本往往得不到最优解。即使恶化率增大，对盈利能力还是有较高的要求。

4 结论

本文分析加工时间为线性恶化函数 $p_j=p_0+\alpha t_j(\alpha>0)$ 的有限工件集，选择工件 j 的加工时间占其所在机器上最大完工时间的比重作为其权重，研究了以工件的加权总完工时间作为加工成本的合作排序博弈问题。证明了最优解的存在性，运用 Matlab 软件进行了算例分析，验证了本文模型的有效性，并能通过适度地鼓励盈利能力较强的合作者来保障盈利能力较弱一方的合作收益。特别地，本文模型在恶化率较低的情形下效果显著。最后与以总完工时间为加工成本的模型[13]进行比较，本文的模型在合作双方盈利能力都不是很强的情况下依然可以求得最优解，适用范围更广。

本文考虑工件在两台机器上的基本加工时间均相同，工件的权重是其加工时间占所在机器最大完工时间的比重，但权重的选取不但与加工时间有关，也与其自身重要性有关，这些问题的研究将会是笔者的后续工作内容。

表 3 文献[13]的最优解 k^* 及纳什博弈解

Tab. 3 The optimal solution k^* and the Nash bargaining solution of the paper[13]

b_1	b_2	e_1	e_2	α	k^*	$v_1(k^*)v_2(k^*)$	$(v_1(k^*),v_2(k^*))$
3	5	0	0	0.6	3	1.425 4e+005	(7.752 0,1.838 7e+004)
3	5	20	50	0.6	10	6.027 7e+004	(93.512 1,644.585 0)
3	5	50	20	0.6	13	5.658 2e+004	(371.097 7,152.471 0)
3	5	15	30	0.6	10	6.547 0e+004	(98.512 1,664.585 0)
3	5	30	15	0.6	12	6.206 6e+004	(239.311 1,259.353 5)
3	8	0	0	0.6	3	3.255 1e+005	(7.752 0,4.199 1e+004)
3	8	20	50	0.6	11	1.427 6e+005	(153.819 4,928.121 4)
3	8	50	20	0.6	13	1.333 1e+005	(371.097 7,359.219 3)
3	8	15	30	0.6	10	1.513 3e+005	(98.512 1,1.536 2e+003)
3	8	30	15	0.6	13	1.424 5e+005	(391.097 7,364.219 3)
3	2	0	0	0.6	—	—	—
3	2	20	50	0.6	—	—	—
3	2	50	20	0.6	—	—	—
3	2	15	30	0.6	—	—	—
3	2	30	15	0.6	—	—	—
3	5	0	0	0.2	—	—	—
3	5	20	50	0.2	—	—	—
3	5	50	20	0.2	—	—	—
3	5	15	30	0.2	—	—	—
3	5	30	15	0.2	—	—	—
3	8	0	0	0.2	—	—	—
3	8	20	50	0.2	—	—	—
3	8	50	20	0.2	—	—	—
3	8	15	30	0.2	—	—	—
3	8	30	15	0.2	—	—	—

参考文献:

[1] 唐国春,张峰,罗守成,等.现代排序论[M].上海:上海科学普及出版社,2003.

Tang G C, Zhang F, Luo S C, et al. Theory of modern scheduling[M]. Shanghai:Shanghai Popular Science Press, 2003.

[2] 金霁,顾燕红,唐国春.最大完工时间排序的两人合作博弈[J].第二工业大学学报,2011,28(1):14-17.

Jin J, Gu Y H, Tang G C. Two-person cooperative games on makespan scheduling[J]. Journd of Second Polytechnic University,2011,28(1):14-17.

[3] Chen Q L. A new discrete Bargaining model on job partition between two manufactures[D]. Hongkong:The Chinese University of Hong Kong,2006.

[4] Nash J F. The bargaining problem[J]. Econometrica,1950, 18(2):155-162.

[5] Nash J F. Two person cooperative games [J]. Econometrica,1953,21(1):128-140.

[6] 窦文卿,顾燕红,唐国春.总完工时间排序两人合作博弈的纳什博弈解[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(5):1-5.

Dou W Q, Gu Y H, Tang G C. The Nash bargaining solution(s) of two-person cooperative games on total completion time scheduling[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science,2012,29(5):1-5.

[7] Gu Y H, Chen Q L. Some Extended Knapsack Problems Involving Job Partition Between Two Parties [J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B,2007,22(3):366-370.

[8] Gu Y H, Fan J, Tang G C, et al. Maximum latency scheduling problem on two-person cooperative games [J/OL]. Journal of Combinatorial Optimization,2013,26(1):71-81. http://www.springerlink.com/content/6mm57855x5598kv8/fulltext.pdf

[9] Gu Y H, Goh M, Chen Q L, et al. A new two-party bargaining mechanism [J/OL]. Journal of Combinatorial Optimi-

zation, 2013, 25 (1): 135-163. http://www. springerlink. com/content/q40684034261hh62/fulltext. pdf

[10] Gan X B, Gu Y H, Vairaktarakis G L, et al. A scheduling problem with one producer and the bargaining counterpart with two producers[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4614: 305-316.

[11] 金霁. 加工时间是开工时间线性函数的两人合作排序博弈问题[J]. 南京师范大学学报:工程技术版,2012,12(4):87-92.
Jin J. Two cooperative game problem on scheduling with linear processing time of its starting time[J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Techaology Edition, 2012, 12(4): 87-92.

[12] 顾燕红,金霁,唐国春. 加工时间可变最大流程时间排序的纳什合作博弈[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,9(4):18-23.
Gu Y H, Jin J, Tang G C. Nash bargaining on maximum flow time scheduling with changeable processing time[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(4): 18-23.

[13] 金霁. 加工时间可变的总完工时间排序两人合作博弈问题[J]. 苏州市职业大学学报:工程技术版,2013,24(3):35-39.
Jin J. Two-person cooperative games on total completion time scheduling with changeable processing time[J]. Journal of Suzhou Vocational University: Engineering and Technology Edition, 2013, 24(3): 35-39.

[14] 周伟刚,高成修,黄凯. 加工时间可控和简单线性增长的平行机排序[J]. 应用数学学报,2010,33(4):741-749.
Zhou W G, Gao C X, Huang K. Parallel Machine Scheduling with Controllable and Simple Linear Increasing Processing Times[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(4): 741-749.

[15] Cheng T C E, Ding Q, Lin B M T. A concise survey of Scheduling with time-dependent processing time[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 152: 1-13.

[16] Wu C C, Lee W C, Shiau Y R. Minimazing the total weighted completion time on a single machine under linear deterioration[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2007, 33: 1237-1243.

[17] Shiau Y R, Lee W C, Wu C C, Chang C M. Two-machine flowshop scheduling to minimize mean flow tome under smiple linear deterioration[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2007, 34: 774-782.

[18] Wang J B, Ng C T, Cheng T C. Single-machine group scheduling with deterioration jobs under a series-parallel graph constraint[J]. Computers and Operations Research, 2008, 35: 2684-2693.

[19] Wang J B, Wang L Y, Wang D, Wang X Y. Single-machine scheduling with a time-dependent deterioration[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2009, 43: 805-809.

Operations Research and Cybernetics

Two-person Cooperative Scheduling Games on Weighted Total Completion Time

QIU Yanling, GAO Shuping, ZHANG Baoyu

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: In the real activities, there are circumstances that one party is not able to undertake all the jobs alone in a large project. This paper specifically supposes two parties, each of whom offers a single machine to process jobs, cooperate in the performance of a project. A division of those jobs should be negotiated to yield a reasonable cooperative profit allocation scheme acceptable to them. This is a two-person cooperative scheduling game. The processing time of each job is a linear deteriorating function of its start time. And the processing cost is determined by his minimized total weighted total completion time. By Matlab software, the influence of profitability and opportunity cost for optimal solution is discussed. Besides, compared with the model which processing cost is the total completion time, examples illustrate that this model is much useful when the profit ability is not strong and deterioration factor is small.

Key words: scheduling games; linear deteriorating; total weighted completion time

(责任编辑 黄 颖)