2014 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2014
第 31 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20140610

Gorenstein $(n,0)$-内射模*

蹇 红，孙春涛
(重庆邮电大学 数理学院，重庆 400065)

摘要：本文给出了$(n,0)$-内射模的推广 Gorenstein $(n,0)$-内射模的定义并得出了 Gorenstein $(n,0)$-内射模的一些同调性质，并讨论了 R 是右 n-凝聚 Noether 环，且 R 是余生成子时，Gorenstein $(n,0)$-内射模的等价条件及性质。给出了 Gorenstein $(n,0)$-内射维数的概念并讨论了某些短正合列下 Gorenstein $(n,0)$-内射维数的关系。最后介绍了每个模都是 Gorenstein $(n,0)$-内射的环的等价条件，以及自$(n,0)$-内射环能被 Gorenstein $(n,0)$-内射、平坦和投射模刻划。

关键词：Gorenstein $(n,0)$-内射模；$(n,0)$-内射模；n-凝聚环；n-表现模；Noether 环

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2014)06-0050-04

1 预备知识

文中所涉及的环都是带有单位元的其整体维数有限的结合环，模均指酉模。对 $n\geqslant 1$，$Hom(M,N)(Ext^n(M,N))$ 表示 $Hom_R(M,N)(Ext_R^n(M,N))$。

设 R 是环，M 是右 R-模。M 称为 FP-内射模[1-2](绝对纯模)，若对所有的有限表现右 R-模 N，有 $Ext^1(N,M)=0$。右 R-模 M 称为 n-表现模[3]，若存在正合列 $F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0$，其中 F_i 是有限生成自由模。右 R-模 M 称为$(n,0)$-内射模[4]，若对任给的 n-表现右 R-模 N，有 $Ext^1(N,M)=0$。显然$(1,0)$-内射模就是 FP-内射模。环 R 称为右 n-凝集环[4]，若任给的 n-表现右 R-模是$(n+1)$-表现右 R-模。作为内射模的推广，Enochs[5] 给出了 Gorenstein 内射模的概念。同理可定义 Gorenstein 投射模。Enochs[6] 给出了 Gorenstein 平坦模的概念。作为 FP-内射模的推广，Gao 给出了 Gorenstein FP-内射模的概念[7]。

本文给出了$(n,0)$-内射模的推广 Gorenstein $(n,0)$-内射模的定义并得出了 Gorenstein $(n,0)$-内射模的一些同调性质，并讨论了 R 是右 n-凝聚 Noether 环，且 R 是余生成子时，Gorenstein $(n,0)$-内射模的等价条件及性质。且给出了 Gorenstein $(n,0)$-内射维数的概念并讨论了某些短正合列下 Gorenstein $(n,0)$-内射维数的关系。最后介绍了每个模都是 Gorenstein $(n,0)$-内射的环的等价条件，以及自$(n,0)$-内射环能被 Gorenstein $(n,0)$-内射、平坦和投射模刻划。

2 概念与主要结论

定义 1 右 R-模 M 称为 Gorenstein $(n,0)$-内射模(简称 G-$(n,0)$-内射)，如果存在右 R-模正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$，其中 E_i 和 E^i 都是$(n,0)$-内射模，且 $M=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$，对任给的 n-表现右 R-模 P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。

注 1) $(n,0)$-内射模是 G-$(n,0)$-内射模。事实上，设右 R-模 M 是$(n,0)$-内射，则有正合列 $\cdots\to 0\xrightarrow{0} M\xrightarrow{I_M} M\xrightarrow{0} 0\to\cdots$，其中 M 和 0 都是$(n,0)$-内射，且 $M=\mathrm{Im}(M\to M)$，对任给的 n-表现右 R-模 P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。故 M 是 G-$(n,0)$-内射模。

2) G-$(n,0)$-内射模类在直积(直和)下封闭。事实上，设$(M_i)_{i\in I}$是 G-$(n,0)$-内射模族，则有正合列 $\cdots\to E_1^i\to E_0^i\to E_i^0\to E_i^1\to\cdots$，其中 $\cdots,E_1^i,E_0^i,E_i^0,E_i^1,\cdots$ 都是$(n,0)$-内射模，且 $M_i=\mathrm{Im}(E_0^i\to E_i^0)$，对任给的 n-表现右 R-模

* **收稿日期**：2013-06-07 **修回日期**：2013-07-25 **网络出版时间**：2014-11-19 21:49

作者简介：蹇红，女，讲师，研究方向为代数环与模范畴，E-mail：jianhong@cqupt.edu.cn

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.010.html

P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。则导出正合列$\cdots\to\prod E_1^i\to\prod E_0^i\to\prod E_i^0\to\prod E_i^1\to\cdots$，且$\prod M_i=\mathrm{Im}(\prod E_0^i\to\prod E_i^0)$，又因 $Hom(P,\prod E_i)\cong\prod Hom(P,E_i)$，故对任给的 n-表现右 R-模 P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。则$\prod M_i$ 是 G-$(n,0)$-内射模。因对任给的 n-表现右 R-模 P，有 $Hom(P,\oplus E_i)\cong\oplus Hom(P,E_i)$，故$\oplus M_i$ 也是 G-$(n,0)$-内射模。

3) 若$\overline{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$是右 R-模$(n,0)$-内射正合列，使得对任给的 n-表现右 R-模 P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。则$\overline{E}$的所有核、像和余核都是 G-$(n,0)$-内射。

4) 当 $n=1$ 时，G-$(1,0)$-内射模就是 G-FP-内射模。

5) 设右 R-模 M 是 G-$(n,0)$-内射，则对所有的 n-表现右 R-模 P，有 $Ext^1(P,M)=0$。事实上，因 M 是 G-$(n,0)$-内射，则有正合列$\cdots\to E_1\xrightarrow{f_0}E_0\xrightarrow{f^0}E^0\xrightarrow{f^1}E^1\to\cdots$，其中 E_i 和 E^i 都是$(n,0)$-内射模，且 $M=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$，对任给的 n-表现右 R-模 P，$Hom(P,-)$保持该正合列正合。设 $L^1=\mathrm{Im}f^1$，则有正合列 $0\to M\to E^0\xrightarrow{f^1}L^1\to 0$。对任给的 n-表现右 R-模 P，函子 $Hom(P,-)$作用其上，导出正合列

$$Hom(P,E^0)\xrightarrow{(f^1)_*}Hom(P,L^1)\to Ext^1(P,M)\to Ext^1(P,E^0)=0。$$

任给 $\alpha\in Hom(P,L^1)$，则 $\alpha\in Hom(P,E^1)$，因 $\alpha(x)\in\mathrm{Im}f^1=Kerf^2$，故$(f^2)_*\alpha(x)=f^2\alpha(x)=0$，即 $\alpha\in Ker(f^2)_*=\mathrm{Im}(f^1)_*$。即存在 $g\in Hom(P,E^0)$使得$(f^1)_*g=f^1g=\alpha$。故 $Hom(P,E^0)\to Hom(P,L^1)$是满同态。则 $Ext^1(P,M)=0$。

定理 1　设 R 是右 n-凝聚 Noether 环，且 R 是余生成子，则右 R-模 M 是 G-$(n,0)$-内射当且仅当存在右 R-模的$(n,0)$-内射正合列$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$，其中 E_i 和 E^i 都是$(n,0)$-内射模，使 $M=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$。

证明　必要性显然成立。

反之，对 n 用归纳法。当 $n=1$ 时，R 是凝聚环且$(1,0)$-内射是 FP-内射，由文献[7]知结论成立。假设当 $n=k$ 时，结论成立。当 $n=k+1$ 时，存在右 R-模的$(k+1,0)$-内射正合列$\overline{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$，使 $M=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$。因 R 是 Noether 环，且 R 是余生成子，则对任给的 k-表现模 L，存在 $f.g$ 自由模 F，使序列 $0\to L\to F\to N\to 0$ 正合。则 N 是$(k+1)$-表现模。设 E 是任给的$(k+1,0)$-内射模，用函子 $Hom(-,E)$作用其上，导出正合列 $0=Ext^1(F,E)\to Ext^1(L,E)\to Ext^2(N,E)$。因 R 是右$(k+1)$-凝聚环，则由文献[8]知，$Ext^2(N,E)=0$。故 $Ext^1(L,E)=0$，即 E 是 $(k,0)$-内射模。则正合列$\overline{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$是$(k,0)$-内射正合列。对任给的$(k+1)$-表现右 R-模 P，有正合列 $0\to K\to F'\to P\to 0$，其中 F'是 $f.g$ 自由模，K 是 k-表现模。由假设知，$Hom(K,-)$保持$\overline{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$的正合性。因此有短正合列复形

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom(P,E_1) & \to & Hom(F',E_1) & \to & Hom(K,E_1) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom(P,E_0) & \to & Hom(F',E_0) & \to & Hom(K,E_0) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom(P,E^0) & \to & Hom(F',E^0) & \to & Hom(K,E^0) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom(P,E^1) & \to & Hom(F',E^1) & \to & Hom(K,E^1) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \to & Hom(P,\overline{E}) & \to & Hom(F',\overline{E}) & \to & Hom(K,\overline{E}) & \to & 0
\end{array}$$

由假设知 $Hom(F',\overline{E})$和 $Hom(K,\overline{E})$是正合的，则由文献[9]知 $Hom(P,\overline{E})$也是正合的。故 M 是 G-$(k+1,0)$-内射。则 M 是 G-$(n,0)$-内射。　　证毕

推论 1　设 R 是右 n-凝聚 Noether 环，且 R 是余生成子，M 是右 R-模，则下列条件等价：1) M 是 G-$(n,0)$-内射模；2) 存在右 R-模正合列$\cdots\to E_1\to E_0\to M\to 0$，其中 E_i 是$(n,0)$-内射模；3) 存在短正合列 $0\to K\to E\to M\to 0$，其中 E 是$(n,0)$-内射模，K 是 G-$(n,0)$-内射模。

证明 1)⇒2)和1)⇒3)由定义显然成立。

2)⇒1)设 M 是满足条件2)的右 R-模,设 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots$ 是 M 的内射分解,则也是 M 的 $(n,0)$-内射分解,则有 $(n,0)$-内射正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$,且 $M=\mathrm{Im}(M\to M)$。由定理1知,M 是 G-$(n,0)$-内射模。

3)⇒2)设有短正合列 $0\to K\to E\to M\to 0$,其中 E 是 $(n,0)$-内射模,K 是 G-$(n,0)$-内射模。因 K 是 G-$(n,0)$-内射模,则有右 R-模正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to K\to 0$,其中 E_i 是 $(n,0)$-内射。由上述两正合列,可得正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E\to M\to 0$。 证毕

性质1 设 R 是右 n-凝聚环,K 是 G-$(n,0)$-内射模,则对任给的 n-表现右 R-模 P,有 $Ext^i(P,K)=0$,$i\geqslant 1$。

证明 因 K 是 G-$(n,0)$-内射模,则有正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$,其中 E_i 和 E^i 都是 $(n,0)$-内射模,且 $K=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$,对任给的 n-表现右 R-模 P,$Hom(P,-)$ 保持该正合列正合。设 $L=\mathrm{Im}(E^0\to E^1)$,有正合列 $0\to K\to E^0\to L\to 0$,其中 L 也是 G-$(n,0)$-内射模。对任给的 n-表现右 R-模 P,函子 $Hom(P,-)$ 作用其上,导出正合列 $Ext^1(P,L)\to Ext^2(P,K)\to Ext^2(P,E^0)$,因 L 是 G-$(n,0)$-内射,由注5)知,$Ext^1(P.L)=0$。因 R 是右 n-凝聚环,由文献[9]知,$Ext^2(P,E^0)=0$。故 $Ext^2(P,K)=0$。又有正合列 $0\to H\to F\to P\to 0$,其中 F 是 $f.g$ 自由模,因 R 是右 n-凝聚环,则 H 也是 n-表现模。函子 $Hom(-,K)$ 作用其上,导出正合列 $0=Ext^2(H,K)\to Ext^3(P,K)\to Ext^3(F,K)=0$,故 $Ext^3(P,K)=0$。以此类推,对任给的 $i\geqslant 1$,有 $Ext^i(P,K)=0$。 证毕

推论2 设 R 是右 n-凝聚环,若 $0\to M\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_{n-1}\to N\to 0$ 是右 R-模正合列,其中 E_i 是 G-$(n,0)$-内射模,则对所有的 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 和 n-表现右 R-模 P,有 $Ext^i(P,N)\cong Ext^{n+i}(P,M)$。

证明 设 $0\to M\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_{n-1}\to N\to 0$ 是右 R-模正合列,其中 E_i 是 G-$(n,0)$-内射模,对任给 $1\leqslant i\leqslant n-1$,令 $L_i=\mathrm{Im}(E_{i-1}\to E_i)$,取 $N=L_n$。对任给的 n-表现右 R-模 P,函子 $Hom(P,-)$ 作用在正合列 $0\to M\to E_0\to L_1\to 0$ 上,导出正合列 $Ext^1(P,E_0)\to Ext^1(P,L_1)\to Ext^2(P,M)\to Ext^2(P,E_0)$。由性质1知,对任给的 $i\geqslant 1$,有 $Ext^i(P,K)=0$。故 $Ext^1(P,L_1)\cong Ext^2(P,M)$。则有 $Ext^{n+i}(P,M)\cong Ext^{n+i-1}(P,L_1)\cong Ext^{n+i-2}(P,L_2)\cong\cdots\cong Ext^i(P,N)$。故对所有的 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 和 n-表现右 R-模 P,有 $Ext^i(P,N)\cong Ext^{n+i}(P.M)$。 证毕

定义2 设 R 是环,右 R-模 M 的 G-$(n,0)$-内射维数定义为 G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(M)=\inf\{m\mid 0\to M\to G_0\to\cdots\to G_m\to 0$,其中 $G_0,\cdots,G_m$ 都是 G-$(n,0)$-内射$\}$。

性质2 设 R 是右 n-凝聚 Noether 环,且 R 是余生成子,$0\to M\to E\to N\to 0$ 是右 R-模正合列,其中 E 是 $(n,0)$-内射,若 M 是 G-$(n,0)$-内射,则 N 也是。且有 G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(M)\leqslant$ G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(N)+1$。

证明 前一个结论由推论2可知。设 G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(N)=m<\infty$,由定义可知 N 有一 G-$(n,0)$-内射分解 $0\to N\to G_0\to\cdots\to G_m\to 0$,因有正合列 $0\to M\to E\to N\to 0$,可导出正合列 $0\to M\to E\to G_0\to\cdots\to G_m\to 0$。$E$ 是 $(n,0)$-内射,则是 G-$(n,0)$-内射。故 G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(M)\leqslant m+1=$ G-$(n,0)$-$\mathrm{id}(N)+1$。 证毕

性质3 设 R 是右 n-凝聚 Noether 环,且 R 是余生成子,$0\to E\to M\to N\to O$ 是右 R-模正合列,其中 E 是 $(n,0)$-内射,N 是 G-$(n,0)$-内射,则 M 也是 G-$(n,0)$-内射。

证明 因 N 是 G-$(n,0)$-内射,则存在正合列 $0\to K\to E'\to N\to 0$,其中 E' 是 $(n,0)$-内射,K 是 G-$(n,0)$-内射。考虑下列拉回图(图1)。

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图1

因 $0\to E\to D\to E'\to 0$ 是正合列,其中 E 和 E' 是 $(n,0)$-内射,则 D 也是 $(n,0)$-内射。由性质2知,M 是 G-$(n,0)$-内射。 证毕

性质4 设 R 是右 n-凝聚 Noether 环,且 R 是余生成子,则下列条件等价:1)每个右 R-模是 G-$(n,0)$-内射;2)环满足下列两个条件:a)每个投射右 R-模是 $(n,0)$-内射;b)每个 n-表现右 R-模是投射。

证明 1)⇒2)。因每个右 R-模是 G-$(n,0)$-内射,则任给的投射模 P 是 G-$(n,0)$-内射,则有右 R-模正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$,其中 E_i 和 E^i 都是 $(n,0)$-内射模,且 $P=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$,对任给的 n-表现右 R-模 N,$Hom(N,-)$ 保持该正合列正合。因此有可裂满同态 $E_0\to P\to 0$,则 P 同构于 E_0 的某一直和项,则 P 是 $(n,0)$-内射。对任给的 n-表现右 R-模 Q,由注5)可知,对任给的右 R-模 M,有 $Ext^1(Q.M)=0$。故 Q 是投射模。

2)⇒1)。设 M 是任给的右 R-模,M 有投射分解 $\cdots\to E_1\to E_0\to M\to 0$,其中 E_i 是投射模,且是 $(n,0)$-内射模。M 又有内射分解 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots$,其中 E^i 是内射模,且是 $(n,0)$-内射模。则有 $(n,0)$-内射右 R-模正合列

$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$，其中 $M=\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$，因任给的 n-表现右 R-模 P 是投射模，则 $Hom(P,-)$ 保持该正合列正合。故 M 是 G-$(n,0)$-内射。　证毕

定理 2　设 R 是右 n-凝聚 Noether 环，且 R 是余生成子，则下列条件等价：1) 每个右 R-模是 G-$(n,0)$-内射；2) R 是右自 $(n,0)$-内射；3) 每个投射右 R-模是 $(n,0)$-内射；4) 每个 G-投射右 R-模是 G-$(n,0)$-内射；5) 每个投射右 R-模是 G-$(n,0)$-内射；6) 每个 G-平坦右 R-模是 G-$(n,0)$-内射；7) 每个平坦右 R-模是 G-$(n,0)$-内射。

证明　1)⇒3)。设 M 是投射右 R-模，则 M 是 G-$(n,0)$-内射，由推论 1 知，有可裂正合列 $0\to N\to E\to M\to 0$，其中 E 是 $(n,0)$-内射，因此 M 是 $(n,0)$-内射。

3)⇒2)。因 R 是投射右 R-模，则 R 是自 $(n,0)$-内射。

2)⇒1)。设 M 是任给的右 R-模，则 M 有投射分解 $\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$，因 R 是自 $(n,0)$-内射，则 F_i 是 $(n,0)$-内射模。由推论 1 知，M 是 G-$(n,0)$-内射。

1)⇒4)⇒5) 和 1)⇒6)⇒7) 显然成立。

5)⇒3)。设 M 是任给的投射右 R-模，则 M 是 G-$(n,0)$-内射模，因此有可裂正合列 $0\to N\to E\to M\to 0$，其中 E 是 $(n,0)$-内射模，故 M 是 $(n,0)$-内射模。

7)⇒3)。设 M 是任给的投射右 R-模，则 M 是平坦的，则 M 是 G-$(n,0)$-内射模，因此有可裂正合列 $0\to N\to E\to M\to 0$，其中 E 是 $(n,0)$-内射模，故 M 是 $(n,0)$-内射模。　证毕

参考文献：

[1] Lam T Y. Lectures on modules and rings[M]. NewYork: Springer-Verlag, 1999.

[2] Lee S B. n-coherent rings[J]. Communications in Algebra, 2002, 30(3): 1119-1126.

[3] Costa D L. Parameterizing families of non-Noetherian rings [J]. Comm Algebra, 1994, 22(10): 3997-4011.

[4] Zhou D X. On n-coherent rings and (n,d)-rings[J]. Comm Algebra, 2004, 32(6): 2425-2441.

[5] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math Z, 1995, 220(2): 611-633.

[6] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstien flat modules[J]. J Nanjing Univ Math Biquart, 1993, 10(1): 1-9.

[7] Gao Z H, Wang F G. Coherent rings and Gorenstein FP-injective modules[J]. Commu in Algebra, 2012, 40(2): 1669-1679.

[8] Zhu Z. On n-coherent rings, n-hereditary rings and n-regular rings[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2011, 37(4): 251-267.

[9] Rotman J J. An introdution to homological algebra[M]. New York: Academic Press, 1979.

Gorenstein $(n,0)$-injective Modules

JIAN Hong, SUN Chuntao

(School of Mathematics and Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In this article, Gorenstein $(n,0)$-injective R-modules are introduced and investigated. Some properties of Gorenstein $(n,0)$-injective R-modules are obtained. We obtain the equivalent conditions of Gorenstein $(n,0)$-injective R-modules when R is right n-coherent Nother ring and R is cogenerator. We introduce the condition of Gorenstein $(n,0)$-injective dimension and discuss Gorenstein $(n,0)$-injective dimension of some short exact sequence. In the end, we investigate rings whose every module is Gorenstein $(n,0)$-injective. And self-$(n,0)$-injective rings are characterized in terms of Gorenstein $(n,0)$-injective, flat and project modules.

Key words: Gorenstein $(n,0)$-injective modules; $(n,0)$-injective modules; n-presented modules; n-coherent rings; Noether rings

（责任编辑　方　兴）