DOI:10.11721/cqnuj20140611

矩阵 Hadamard 积最小特征值的新界值估计*

李 华，刘玉晓，刘常胜
(河南城建学院 数理学院，河南 平顶山 467044)

摘要:设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异 M 矩阵，给出 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的 Hadamard 积的最小特征值的新界值估计，设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都为非奇异 M 矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$，则有 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}$。估计式仅依赖矩阵的元素，易于计算。数值例子表明所得新估计式改进了现有的一些结果。

关键词:M 矩阵；Hadamard 积；最小特征值
中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)06-0054-04

先引入以下记号 $r_{li}=\dfrac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|}$，$l\neq i$，$r_i=\max\limits_{l\neq i}\{r_{li}\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$s_{ji}=\dfrac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k}{|a_{jj}|}$，$j\neq i$，$s_i=\max\limits_{j\neq i}\{s_{ji}\}$，$i=1,2,\cdots,n$。$\mathbf{C}^{n\times n}$($\mathbf{R}^{n\times n}$)表示 n 阶复(实)矩阵集，将所有非对角元素都为非正实数的 n 阶方阵的集合记为 $\boldsymbol{Z}_n$。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{Z}_n$，如果 $\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}>0$，$\alpha\geqslant\rho(\boldsymbol{P})$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 M 矩阵。如果 $\alpha>\rho(\boldsymbol{P})$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M 矩阵，非奇异 M 矩阵的集合记为 $\boldsymbol{M}_n$。文献[1]指出，若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$，则存在一个正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$ 是行严格对角占优的 M 矩阵。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{Z}_n$，称 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\limits_i\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值，其中 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的谱集合。

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 分别是 k，l 阶方阵，$k\geqslant1$，$l\geqslant1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约的，否则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的。

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$ 且不可约，则存在正向量 v 使得 $v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\tau(\boldsymbol{A})v$，称向量 v 为 $\boldsymbol{A}$ 的左 Perron 特征向量。

定义 1[1] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(c_{ij})=(a_{ij}b_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积。

由文献[1]知，如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 M 矩阵，则 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是 M 矩阵。文献[2-9]对 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 的最小特征值进行了一系列估计。Horn 和 Johnson[2] 给出了如下的经典结果：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$，则 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\tau(\boldsymbol{B})\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_{ii}$。2008 年，黄荣[3] 改进了上述结果：$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\dfrac{1-\rho(J_{\boldsymbol{A}})\rho(J_{\boldsymbol{B}})}{1+\rho^2(J_{\boldsymbol{A}})}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}}$，其中 $\rho(J_{\boldsymbol{A}})$，$\rho(J_{\boldsymbol{B}})$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。2010 年，李耀堂等[4] 给出了一个新的结果：$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\dfrac{b_{ii}-s_i\sum\limits_{j\neq i}|b_{ji}|}{a_{ii}}\right\}$。2011 年，崔润卿[5] 改进了文献[4]的结果：$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\dfrac{b_{ii}-s_i(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))}{a_{ii}}\right\}$。2012 年，陈付彬[6] 又给出了一个结果：

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-\left[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}\sum_{k\neq i}|b_{ki}|\sum_{k\neq j}|b_{kj}|\right]^{\frac{1}{2}}\right\}。$$

* **收稿日期**:2013-06-19 **网络出版时间**:2014-11-19 21:49
资助项目:河南省科技计划项目(No.112300410191);河南省教育厅自然科学项目(No.13B520945);河南城建学院校科学研究项目(No.2014JYB018)
作者简介:李华，女，讲师，研究方向为数值代数与矩阵谱估计，E-mail: dzkdlh@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.011.html

2 主要结论

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 为两个正对角矩阵,则有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE})。$$

引理 2[1]　(Brauer 卵形定理)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$x_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值位于下列区域的并集中:$\bigcup\limits_{i\neq j}\left\{\lambda:|\lambda-a_{ii}||\lambda-a_{jj}|\leqslant\left(x_i\sum\limits_{k\neq i}^{n}\frac{1}{x_k}|a_{ki}|\right)\left(x_j\sum\limits_{k\neq j}^{n}\frac{1}{x_k}|a_{kj}|\right)\right\}$。

引理 3[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是行严格对角占优的 M 矩阵,$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$,则 $\beta_{ji}\leqslant\dfrac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k}{a_{jj}}\beta_{ii}$,$j\neq i$。

引理 4[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是行严格对角占优的 M 矩阵,$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$,则 $\beta_{ii}\geqslant\dfrac{1}{a_{ii}}$。

本文在文献[2-6]的基础上继续研究 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 的最小特征值的下界估计,所得新估计式在一定条件下改进了文献[4-6]的结果。

定理 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$,$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$,则有

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}。$$

证明　当 $n=1$ 时,显然成立。

假设 $n\geqslant2$,若矩阵 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$不可约,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也不可约。由引理 1 知,存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$,使得

$$\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\circ(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD})^{-1},$$

即 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD})$。由文献[1]知,$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD}$ 为行严格对角占优的 M 矩阵,因此不失一般性,假设 $\boldsymbol{A}$ 为行严格对角占优的 M 矩阵。

由于 $\boldsymbol{A}$ 为行严格对角占优的 M 矩阵,则 $0<r_j<1$。

记 $R_j'=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|r_k$,$R_j'=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|r_k\leqslant|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k\leqslant\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|=R_j$。存在实数 $\alpha_{ji}(0\leqslant\alpha_{ji}\leqslant1)$ 使得 $|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k=\alpha_{ji}R_j+(1-\alpha_{ji})R_j'$。记 $\alpha_j=\max\limits_{i\neq j}\{\alpha_{ji}\}(0<\alpha_j\leqslant1)$,$s_j=\max\limits_{j\neq i}\left\{\dfrac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k}{|a_{jj}|}\right\}=\dfrac{\alpha_{ji}R_j+(1-\alpha_{ji})R'}{a_{jj}}$。

由于 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$,则存在正向量 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\tau(\boldsymbol{B})v$,即 $\dfrac{\sum\limits_{j\neq i}|b_{ji}|v_j}{v_i}=b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B})$。

设 $\boldsymbol{V}=diag(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{VBV}^{-1}$,则 $\overline{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} b_{11} & \frac{v_1}{v_2}b_{12} & \cdots & \frac{v_1}{v_n}b_{1n} \\ \frac{v_2}{v_1}b_{21} & b_{22} & \cdots & \frac{v_2}{v_n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{v_n}{v_1}b_{n1} & \frac{v_n}{v_2}b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$,则 $\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$为不可约的 M 矩阵,由引理 1 知,$\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{VBV}^{-1})\circ\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{V}^{-1}$,即 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\tau(\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$。设 $\tau(\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\lambda$,由引理 2 知,存在一组实数 $i,j,i\neq j$ 使得 $|\lambda-\beta_{ii}\bar{b}_{ii}||\lambda-\beta_{jj}\bar{b}_{jj}|\leqslant\left(s_i\sum\limits_{k\neq i}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{ki}\bar{b}_{ki}|\right)\left(s_j\sum\limits_{k\neq j}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{kj}\bar{b}_{kj}|\right)$。即

$$|\lambda-\beta_{ii}b_{ii}||\lambda-\beta_{jj}b_{jj}|\leqslant\left(s_i\sum_{k\neq i}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{ki}\bar{b}_{ki}|\right)\left(s_j\sum_{k\neq j}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{kj}\bar{b}_{kj}|\right)。$$

由引理 3 知

$$\left(s_i\sum_{k\neq i}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{ki}\bar{b}_{ki}|\right)\left(s_j\sum_{k\neq j}^{n}\frac{1}{s_k}|\beta_{kj}\bar{b}_{kj}|\right)\leqslant$$

$$\left(s_i\sum_{k\neq i}^{n}\frac{1}{s_k}\mid\bar{b}_{ki}\mid\frac{\mid a_{ki}\mid+\sum\limits_{l\neq k,i}\mid a_{kl}\mid r_l}{a_{kk}}\beta_{ii}\right)\left(s_j\sum_{k\neq j}^{n}\frac{1}{s_k}\mid\bar{b}_{kj}\mid\frac{\mid a_{kj}\mid+\sum\limits_{l\neq k,j}\mid a_{kl}\mid r_l}{a_{kk}}\beta_{jj}\right)\leqslant$$

$$\left(s_i\sum_{k\neq i}^{n}\mid\bar{b}_{ki}\mid\beta_{ii}\right)\left(s_j\sum_{k\neq j}^{n}\mid\bar{b}_{kj}\mid\beta_{jj}\right)=\left(s_i\sum_{k\neq i}^{n}\frac{\mid b_{ki}\mid v_k}{v_i}s_j\beta_{ii}\right)\left(s_j\sum_{k\neq j}^{n}\frac{\mid b_{kj}\mid v_k}{v_j}\beta_{jj}\right)=s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))。$$

因此有

$$|\lambda-\beta_{ii}b_{ii}||\lambda-\beta_{jj}b_{jj}|\leqslant s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B})),$$

则有

$$\lambda\geqslant\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}。$$

即 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}$。

若 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 为可约矩阵,设 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})$ 为置换矩阵,其中 $d_{12}=d_{23}=\cdots=d_{n-1,n}=d_{n1}=1$,其余的 $d_{ij}=0$,则对任何正实数 t,$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{B}-t\boldsymbol{D}$ 的所有主子式是正的,从而 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{B}+t\boldsymbol{D}$ 为非奇异不可约 M 矩阵,用 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{B}+t\boldsymbol{D}$ 分别代替 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,让 $t\to0$,由连续性则可得到上述同样的结果。 证毕

定理2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$,$\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$,则有

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{b_{ii}-s_i(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))}{a_{ii}}\right\}。$$

即定理1的结果要优于文献[5]的结果。

证明 不失一般性,当 $i\neq j$ 时,假设 $\beta_{ii}b_{ii}-s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))\leqslant\beta_{jj}b_{jj}-s_j\beta_{jj}(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))$。即 $s_j\beta_{jj}(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))\leqslant s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))+\beta_{jj}b_{jj}-\beta_{ii}b_{ii}$。则有

$$\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))-\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj})]^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[\beta_{jj}b_{jj}-\beta_{ii}b_{ii}+2s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))]\}=\beta_{ii}b_{ii}-s_i\beta_{ii}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))\geqslant\frac{b_{ii}-s_i(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))}{a_{ii}}。$$

即

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{b_{ii}-s_i(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))}{a_{ii}}\right\}。$$

证毕

注1 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 来说,由著名的盖尔圆盘定理知 $b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B})\leqslant\sum\limits_{k\neq i}\mid b_{ki}\mid$,$b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B})\leqslant\sum\limits_{k\neq j}\mid b_{kj}\mid$,及

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-\left[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}\sum_{k\neq i}\mid b_{ki}\mid\sum_{k\neq j}\mid b_{kj}\mid\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

即定理1的结果要优于文献[6]的相应结果。

3 数值例子

例 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-0.5&0&0\\-0.5&0&-0.5&0\\0&-0.5&1&-0.5\\0&0&-0.5&1\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_4$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_4$。由文献[2]知,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant0.07$;由文献[3]知,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant0.0707$;由文献[4]知,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant0.08$;由文献[5]知,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant0.0989$;由文献[6]知,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant0.1644$;由定理1知

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}=0.17。$$

实际上，$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=0.2148$。

由此可知，定理 1 的结果在一定条件下要优于文献[2-6]中的相应结果。

参考文献：

[1] Fiedler M, Markkam T. An inequality for the Hadamard product of an M matrix and inverse M matrice[J]. Lin Alg Appl, 1988, 101: 1-8.

[2] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analusis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[3] Huang R. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrice[J]. Lin Alg Appl, 2008, 428: 1551-1559.

[4] Li Y T, Li Y Y, Wang R W. ome new bounds on eigenvalues of the Hadamard product of matrices[J]. Lin Alg Appl, 2010, 432: 536-545.

[5] 崔润卿，司纪龙. 矩阵 Hadamard 积最小特征值的下界估计[J]. 河南理工大学学报：自然科学版，2011，30(4)：493-496.

Cui R Q, Si J L. Estimate of lower bounds for the minimum eigenvalue of Hadamard product of matrices[J]. Journal of Henan Polytechnic University: Natural Science, 2011, 30(4): 493-496.

[6] 陈付彬，任献花. *M* 矩阵 Hadamard 积最小特征值的下界的新估计式[J]. 数学理论与应用，2012，32(2)：60-66.

Chen F B, Ren X H. New bound on eigenvalue of the Hadamard product of *M* matrix[J]. Mathematical Theory and Applications, 2012, 32(2): 60-66.

[7] 高美平. *M*-矩阵与其逆的 Hadamard 积的最小特征值下界新的估计式[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2014，37(1)：90-97.

Gao M P. New estimation formulas on lower bound for the minimum eigenvalue of Hadamard product of *M*-matrix and its inverse[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2014, 37(1): 90-97.

[8] 李华. 非负矩阵 Hadamard 积和 *M* 矩阵 Fan 积特征值的新界值[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2013，37(4)：425-427.

Li H. The new bounds on the eigenvalues of the Hadamard product of nonnegative matrices and the Fan product of *M* matrices[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science, 2013, 37(4): 425-427.

[9] 丁树良. 两个非负矩阵的 Hadamard 积的估计[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，1994，18(3)：212-217.

Ding S L. Estimation of the Hadamard product of two nonnegative definite matrices[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science, 1994, 18(3): 212-217.

New Bound on the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of Matrices

LI Hua, LIU Yuxiao, LIU Changsheng

(School of Mathematical and Physical Science, Henan University of Urban Construction, Pingdingshan Henan 467044, China)

Abstract: If $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are nonsingular M matrices. A new bound on the minimum eigenvalue of the Hadamard product for $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A}^{-1}$ is given. Let $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ and $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ are nonsingular M matrices, $\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$. We have $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4s_is_j\beta_{ii}\beta_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}$. The bound is easier to calculate since they only depend on the entries of matrices. Finally, the numerical example shows that the bound improves some estimating results.

Key words: *M* matrix; Hadamard product; the minimum eigenvalue

(责任编辑　黄　颖)