DOI:10.11721/cqnuj20140615

关于一类算子的共鸣定理*

丽　娜
(呼伦贝尔学院 数学系,内蒙古 呼伦贝尔 021008)

摘要:本文将证明一类非线性算子的共鸣定理。设 Λ 是任意指标集,X 是一个第二纲的赋 $\beta*$ 范空间,X_λ 是赋准范空间($\lambda\in\Lambda$),A_λ 是 X 到 X_λ 内的次减算子,当$\{A_\lambda\}$满足本文中定理 1 的条件时,有$\sup\limits_{\lambda}\sup\limits_{\|x\|^*\leqslant r}\|A_\lambda(x)\|<\infty$成立。

关键词:次减泛函;次减算子;赋 β^* 范空间;共鸣定理
中图分类号:O177.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)06-0069-04

共鸣定理,也称一致有界原理,与开映照定理、Hahn-Banach 延拓定理一起,号称经典泛函分析的三大基本定理。它在求和法理论、插值理论、偏微分方程的稳定性理论、算子方程的近似解、抽象函数的非线性分析理论、机械求积公式的收敛问题等方面都有广泛而深刻的应用。

共鸣定理是泛函分析中最基本的定理之一,由于它在理论上和实际中有着广泛而重要的应用,因而得到不同形式的拓广。关于共鸣定理的推广基本上可分为两种类型:一类是空间框架的开拓,另一类是在原有的赋范空间框架下将有界线性算子族推广为某些非线性算子族。例如文献[1]讨论了 K-半拟次加泛函族的共鸣定理,而文献[2]通过在 x 上引入 F 性泛函,对其中的一类重要泛函—加性泛函给出了共鸣定理,近来文献[3-6]研究了加性算子族和凸泛函的共鸣定理,丘京辉教授在文献[7-8]中给出了“准齐性算子族的共鸣定理”和“有序拓扑向量空间中的共鸣定理”,本文将对拟次减算子族给出共鸣定理。

1 定义与符号

本文中$\|\cdot\|^*$表示 β^* 范数,$\|\cdot\|$表示赋准范数。

定义 1[9]　设 $q(x)$是线性空间 X 上的泛函,若对任意 $x_1,x_2\in X$ 有

$$q(x_1+x_2)\leqslant\max\{q(x_1),q(x_2)\}$$

称 $q(x)$为 X 上的次减泛函。

定义 2　设 A 是赋 β^*($0<\beta^*\leqslant1$)范空间 X 到赋准范空间 Y 的算子,若对 $x_1,x_2\in X$ 有

$$\|A(x_1+x_2)\|\leqslant\max\{\|A(x_1)\|,\|A(x_2)\|\}$$

则称 A 为次减算子;称 A 为拟次减算子,是指存在常数 $0<\beta<1$,使

$$\|A(x+y)\|\leqslant\beta\max\{\|A(x)\|,\|A(y)\|\},x,y\in X。$$

2 主要结论

由定义 1 不难证明,次减泛函具有下列性质:

引理 1　若 $q(x)$是线性空间 X 上的次减泛函,则对任意 $n\in\mathbf{N}$ 及 $x\in X$ 有

$$q(nx)\leqslant q(x)\leqslant q(x/n)$$

引理 2　设 X 是赋 β^*($0<\beta^*\leqslant1$)范空间,$q(x)$为 X 上的次减泛函。如果 $q(x)$在某球 $B(x_0,\delta_0)$是(数值)有上界的,并且相应存在数 ξ_0,使得 $q(-\xi_0x)<\infty$,那么,或者 $q(x)=-\infty$,或者 $q(x)$在任意原心球 B_r 上(数值)有上界。

---

* **收稿日期**:2013-01-05　　**修回日期**:2014-05-06　　**网络出版时间**:2014-11-19 21:49
资助项目:内蒙古自治区高等学校科学研究项目(No. NJ09180)
作者简介:丽娜,女,教授,研究方向为泛函分析,E-mail:qirimai@eyou.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.015.html

证明 如果 $q(x)$ 在 X 上不恒取 $-\infty$，则必有一元 x_1，使得 $q(x_1)\neq-\infty$。对任意 $r_0>0$，令 $r=\|x_1\|^*+r_0$，对上面元 x_0 及数 δ_0，可找到一个自然数 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，就有 $(\|x_0\|^*+r)<n\delta_0$。此外，还可以找到两个自然数 n_1 和 n_2 使得

$$n_0<n_1^{\beta^*},n_1<n_2\xi_0<n_1+1$$

这样，对于任意 $x\in B_r$ 有

$$q(x)=q(x+n_2\xi_0x_0-n_2\xi_0x_0)\leqslant\max\{q(x+n_2\xi_0x_0),q(-n_2\xi_0x_0)\} \tag{1}$$

由引理1有

$$q(x+n_2\xi_0x_0)=q\left[n_1\frac{1}{n_1}(x+n_2\xi_0x_0)\right]\leqslant q\left[\frac{1}{n_1}(x+n_2\xi_0x_0)\right] \tag{2}$$

由 n_0,n_1,n_2 的取法

$$\left\|\frac{x+n_2\xi_0x_0}{n_1}-x_0\right\|^*=\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\beta^*}\|x+n_2\xi_0x_0-n_1x_0\|^*\leqslant\left(\frac{1}{n_1}\right)\beta^*[\|x\|^*+(n_2\xi_0-n_1)^{\beta^*}\|x_0\|^*]\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\beta^*}(r+\|x_0\|^*)<\frac{1}{n_0}(r+\|x_0\|^*)<\delta_0$$

即

$$\frac{1}{n_1}(x+n_2\xi_0x_0)\in B(x_0,\delta_0)$$

由已知及(2)式

$$q\left[\frac{1}{n_1}(x+n_2\xi_0x_0)\right]<\rho_0 \tag{3}$$

注意到引理1有

$$q(-n_2\xi_0x_0)\leqslant q(-\xi_0x_0)<\infty \tag{4}$$

根据(1)、(2)、(3)、(4)式得

$$q(x)\leqslant\rho_0+q(-\xi_0x_0)\triangleq\rho_1$$

这说明 $q(x)$ 在任意原心球 B_r 上(数值)有上界。 证毕

定理1 设 X 是第二纲的赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant1)$，X_λ 是赋准范空间(其中 $\lambda\in\Lambda$)，A_λ 为从 X 到 X_λ 内的算子，如果 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是次减算子族，其满足以下条件：

1)在 X 中存在一族球 $\{B(x_\lambda,\delta_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 和一常数 $\rho_0>0$，使得均有

$$\|A_\lambda(x)\|\leqslant\rho_0,\forall x\in B(x_\lambda,\delta_\lambda)(\forall\lambda\in\Lambda)$$

并且有

$$\sup_\lambda\|A_\lambda(-x_\lambda)\|<\infty$$

2)在 X 中某球 $B(x_1,\delta_1)$ 内的第二纲集 Q 上，以及相应的反对称某球 $-\xi_1B(x_1,\delta_1)$ (ξ_1 为某一正数)内的一个稠密子集 D 上，均有

$$\sup_\lambda\|A_\lambda(x)\|<\infty,\forall x\in Q\cup D$$

则对任意的 $r>0$，一致地有

$$\sup_\lambda\sup_{\|x\|^*\leqslant r}\|A_\lambda(x)\|<\infty$$

证明 令

$$q(x)=\sup_\lambda\|A_\lambda(x)\|,\forall x\in A_\lambda$$

显然，对任意 $x_1,x_2\in X$ 有

$$q(x_1+x_2)=\sup_\lambda\|A_\lambda(x_1+x_2)\|\leqslant\sup_\lambda\max\{\|A_\lambda(x_1)\|,\|A_\lambda(x_2)\|\}=\max\{q(x_1),q(x_2)\}$$

即 $q(x)$ 是次减泛函。设集列 $\{M_k\}$ 为

$$M_k=\{x:q(x)<k,x\in Q\},\forall k\in\mathbb{N}$$

则由定理假设有 $Q=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$，故从 Q 的第二纲知，存在 M_{k_0} 和 X 中的一个球 $B(x_0,\delta_0)$ 使得

$$B(x_0,\delta_0)\subset\overline{M}_{k_0} \tag{5}$$

并且注意到 $Q\subset B(x_1,\delta_1)$,有 $B(x_0,\delta_0)\subset B(x_1,\delta_1)$。

下面证明 $q(x)$ 在球 $B(x_0,\delta_0)$ 上有上界。

事实上,对任意 $x\in B(x_0,\delta_0)$ 及 $\lambda\in\Lambda$,由(5)式知存在 $y_0\in M_{k_0}$,使

$$\| x-y_0 \|^* <\delta_\lambda$$

这样,由于 $x_\lambda+x-y_0\in B(x_\lambda,\delta_\lambda)$,从 $q(x)$ 的次减性及定理 1 中的条件 1)得

$$\| A_\lambda(x) \| = \| A_\lambda(x-y_0+x_\lambda+y_0-x_\lambda) \| \leqslant \max\{ \| A_\lambda(x-y_0+x_\lambda) \| , \| A_\lambda(y_0-x_\lambda) \| \}\leqslant$$
$$\max\{ \| A_\lambda(x-y_0+x_\lambda) \| , \| A_\lambda(y_0) \| , \| A_\lambda(-x_\lambda) \| \}<\rho_0+\sup_\lambda \| A_\lambda(y_0) \| +\sup_\lambda \| A_\lambda(-x_\lambda) \| \triangleq\rho_1$$

而 ρ_1 与 $B(x_0,\delta_0)$ 中元 x 及指标 $\lambda\in\Lambda$ 的选择均无关时,可立即得出

$$q(x)=\sup_\lambda \| A_\lambda(x) \| \leqslant\rho_1,\ \forall x\in B(x_0,\delta_0)$$

即 $q(x)$ 在 $B(x_0,\delta_0)$ 上有上界。又由已知 $B(x_0,\delta_0)\subset B(x_1,\delta_1)$,因此有

$$-\xi_1 B(x_0,\delta_0)\subset -\xi_1 B(x_1,\delta_1)$$

并从集 D 稠于 $-\xi_1 B(x_1,\delta_1)$ 的假设可以得到:$-\xi_1 B(x_0,\delta_0)$ 内必含有 D 中的点。因此对 $-\xi_1 x_0\in -\xi_1 B(x_0,\delta_0)$ 存在 $y\in D$,使 $\| -\xi_1 x_0-y \|^* <\delta_\lambda$,那么 $x_\lambda-\xi_1 x_0-y\in B(x_\lambda,\delta_\lambda)$,从而

$$\| A_\lambda(-\xi_1 x_0) \| = \| A_\lambda(-\xi_1 x_0-y+x_\lambda+y-x_\lambda) \| \leqslant\max\{ \| A_\lambda(x_\lambda-y-\xi_1 x_0) \| , \| A_\lambda(y) \| , \| A_\lambda(-x_\lambda) \| \}\leqslant$$
$$\rho_0+\sup_\lambda \| A_\lambda(y) \| +\sup_\lambda \| A_\lambda(-x_\lambda) \| \triangleq\rho_2$$

由引理得,对任意 $r>0$,一致地有

$$\sup_\lambda \sup_{\| x \|^* \leqslant r} \| A_\lambda(x) \| <\infty$$　证毕

根据定义 2 可知,拟次减算子必是次减算子,因此可得下列定理 2。

定理 2　设 X 是第二纲的赋 β^* 范空间($0<\beta^*\leqslant1$),X_λ 是赋准范空间(其中 $\lambda\in\Lambda$),A_λ 为从 X 到 X_λ 内的算子,如果 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是拟次减算子族,其满足以下条件:

1)在 X 中存在一族球 $\{B(x_\lambda,\delta_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 和一常数 $\rho_0>0$,使得均有

$$\| A_\lambda(x) \| \leqslant\rho_0,\ \forall x\in B(x_\lambda,\delta_\lambda)(\forall\lambda\in\Lambda)$$

并且有

$$\sup_\lambda \| A_\lambda(-x_\lambda) \| <\infty。$$

2)在 X 中某球 $B(x_1,\delta_1)$ 内的第二纲集 Q 上,以及相应的反对称某球 $-\xi_1 B(x_1,\delta_1)$(ξ_1 为某一正数)内的一个稠密子集 D 上,均有

$$\sup_\lambda \| A_\lambda(x) \| <\infty,\ \forall x\in Q\cup D$$

则对任意的 $r>0$,一致地有

$$\sup_\lambda \sup_{\| x \|^* \leqslant r} \| A_\lambda(x) \| <\infty。$$

致谢:感谢南开大学定光桂教授的指导。

参考文献:

[1] 宋继生,李虹. 关于共鸣定理[J]. 数学学报,1988,31(2):192-200.
Song J S, Li H. On resonance theorem[J]. Acta Mathematica Sinica,1988, 31(2): 192-200.

[2] 宣恒农. 一个一般形式的一致有界原理[J]. 数学学报,1991,34(1):131-137.
Xuan H N. A general form of the uniform boundedness principle[J]. Acta Mathematica Sinica, 1991,34(1): 131-137.

[3] 定光桂. 关于一类算子族的共鸣定理[J]. 数学学报,1977,20(2):153-156.
Ding G G. On resonance for a family of operator[J]. Acta Mathematica Sinica, 1977,20(2): 153-156.

[4] 定光桂. 关于凸泛函族的共鸣定理[J]. 数学学报, 1981,24(6);651-856.
Ding G G. On resonance for a family of convex functional[J]. Acta Mathematica Sinica, 1981,24(6): 651-856.

[5] 刘玉波. 赋准范空间上的共鸣定理[J]. 南开大学学报,2003,36(1):22-27.
Liu Y B. Resonance theorem in quasi-normed space[J]. Journal of Nankai University, 2003,36(1): 22-27.

[6] Ding G G. The uniform boundeness principle in some topological vector groups[J]. Systems Science and Mathema- tical Sciences,2000 B(3): 292-301.

[7] 丘京辉.准齐性算子族的共鸣定理[J].数学年刊 A 辑:中文版,2004,25A(3):389-396.
Qiu J H. Resonance theorem for families of quasi-homogeneous operators[J]. Chinese Annals of Mathematics,2004,25A(3):389-396.
[8] 丘京辉.有序拓扑向量空间中的共鸣定理[J].数学杂志,2005,25(4):389-393.
Qiu J H. Resonance theorems in ordered topological vector spaces[J]. Journal of Mathematics,2005,25(4):389- 393.
[9] 周敦.关于一类非线性泛函的极大值问题[J].广西教育学院学报,1994(2):91-94.
Zhou D. The maximum problem for a family of nonlinear functional[J]. Journal of Guangxi College of Education,1994(2):91-94.

On Resonance Theorem for a Class of Operator

LI Na
(Department of Mathematics, Hulunbeier College, Hailaer Neimenggu 021008, China)

Abstract: In this paper, we prove resonance theorem for a class of non-linear operator. Let Λ be an index set of arbitrary cardinality and suppose X is a β^*-normed space with second category, $\{X_\lambda\}$, where λ runs through Λ, is a collection of members of normed space, $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ is a sub-decreasing operator from X into X_λ, if $\{A_\lambda\}$ satisfies the condition of the theorem 1 of this paper, then $\sup\limits_{\lambda}\sup\limits_{\|x\|^*\leqslant r}\|A_\lambda(x)\|<\infty$.

Key words: sub-decreasing functional; sub-decreasing operator; β^*-normed space; resonance theorem

(责任编辑 游中胜)