

新五维混沌系统的同步研究*

王东晓, 武大勇

(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

摘要: 基于稳定性理论, 对一个新的五维混沌系统的同步和反同步进行了研究。用非线性反馈的方法构造超混沌系统的同步方案及其实现混沌系统的反同步方案。并理论证明所设计控制器能够使受控误差系统全局渐进稳定到同步误差系统的零点, 表明该方案的可行性。理论分析和仿真结果都验证了方法的可行性和有效性, 所设计方案在基于混沌同步的保密通信中有很好的应用前景。

关键词: 超混沌系统; 同步; 反同步; 控制器

中图分类号: O415; TP27

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2014)06-0087-05

混沌系统本身的性质、对初始值的敏感性使得最初时科研工作者认为不可能实现混沌系统同步。在 Pecora 和 Corroll 于实验中实现了两个耦合混沌系统的同步^[1-2]之后, 广大科研工作者研究混沌系统同步的大幕拉开了。又由于同步问题在通信、信号的处理、医学等多个领域应用前景十分广阔, 越来越多的爱好者投入到混沌系统的控制和同步研究上来。而混沌同步和传统的控制混沌系统的方法不完全相同, 同步是一种广义的控制混沌的问题。简单地说, 混沌同步是控制两个系统实现步调一致, 在有效的控制下, 实现相图的重合。

研究人员已经得出多种实现混沌系统同步的方法, 同步也包括完全同步、反同步、异结构同步, 及不同维系统之间的同步等等多种同步。实现混沌系统同步的控制器非常简单, 涉及到的状态变量越少, 实现同步的时间越短, 这样的同步方案将是非常理想的方案。超混沌系统的更加复杂的拓扑结构、超混沌系统的同步与反同步等自然吸引广大爱好者的注意^[3-9], 而新的超混沌系统相关研究也层出不穷^[9-11]。本文对新五维超混沌系统^[10]的同步、反同步问题做出思考, 用所构造控制器可以实现同步, 并给出数值仿真, 表明该方案的有效性。

1 同步控制

考虑驱动系统为混沌系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为非线性映射。相应的响应系统

$$\dot{y} = g(t, x) + u(t, x, y), \quad (2)$$

其中 $y \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为非线性映射, u 为控制器。记 $e_i = y_i - x_i$ 为系统误差。由系统(1)和系统(2)有误差系统为 $\dot{e} = g(t, x) - f(t, x) + u(t, x, y)$, 当设计控制器 u 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 称系统(1)与系统(2)的状态达到同步。

1.1 五维混沌系统

魏亚东等^[12]在研究超 Lorenz 混沌系统过程中, 得出一新的五维超混沌系统

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 + x_4 - x_5, \dot{x}_2 = bx_1 - x_2 - x_1x_3, \dot{x}_3 = cx_3 + x_1x_2, \dot{x}_4 = -x_4 - x_2x_3, \dot{x}_5 = dx_1. \quad (3)$$

当系统参数取值 $a=10, b=28, c=-8/3, d=5$ 时, 系统 Lyapunov 指数为 $\lambda_1=0.265\ 1, \lambda_2=0.059\ 3, \lambda_3=0,$

* 收稿日期: 2013-06-19 修回日期: 2013-06-26 网络出版时间: 2014-11-19 21:49

资助项目: 河南省教育厅基金(No. 2011B110030); 河南省科技厅基础与前沿技术研究计划项目(No. 122300410390); 郑州航空工业管理学院青年基金(No. 2012113004)

作者简介: 王东晓, 男, 讲师, 研究方向为动力系统及其应用, E-mail: wdx@zzia.edu.cn

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.019.html>

$\lambda_4 = -0.0286, \lambda_5 = -14.9628$ 。其中含有两个正的 Lyapunov 指数, 并且所有指数之和小于 0, 系统处于混沌态(图 1)。

1.2 同步控制

笔者构造方案, 来实现该混沌系统的同步。以系统(3)作为目标系统, 响应系统为

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= -ay_1 + ay_2 + y_4 - y_5 + U_1, \\
 \dot{y}_2 &= by_1 - y_2 - y_1y_3 + U_2, \\
 \dot{y}_3 &= cy_3 + y_1y_2 + U_3, \\
 \dot{y}_4 &= -y_4 - y_2y_3 + U_4, \\
 \dot{y}_5 &= dy_1 + U_5.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

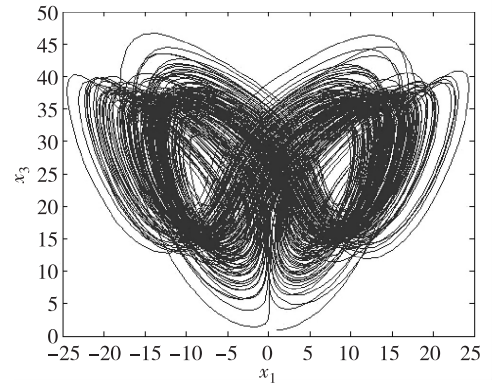


图 1 系统(3)的吸引子

其中 $U_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 为控制器, 笔者的目的是构造尽可能简单的控制器, 实现系统(3)、(4)的同步, 记系统误差为 $e_i = y_i - x_i (i=1, \dots, 5)$, 由系统(3)、(4), 得到误差变量随时间的变化过程如下误差系统

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= -ae_1 + ae_2 + e_4 - e_5 + U_1, \dot{e}_2 = be_1 - e_2 - e_1e_3 - x_1e_3 - e_1x_3 + U_2, \dot{e}_3 = ce_3 + e_1e_2 + x_1e_2 + e_1x_2 + U_3, \\
 \dot{e}_4 &= -e_4 - e_2e_3 - x_2e_3 - e_2x_3 + U_4, \dot{e}_5 = de_1 + U_5.
 \end{aligned}$$

控制器 U_i 如下取定时, 误差系统在原点处趋于稳定, 系统(3)、(4)同步。

$$U_1 = 0, U_2 = -m_2e_2, U_3 = -m_3e_3, U_4 = -m_4e_4 + e_2e_3, U_5 = -m_5e_5 - 4e_1, \tag{5}$$

其中 $m_i (i=2, \dots, 5)$ 为待定常数。

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2).$$

综上所述, 函数 V 对时间 t 的导数

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 + e_5\dot{e}_5 = -ae_1^2 + ae_1e_2 + e_1e_4 - e_1e_5 + U_1e_1 + be_1e_2 - e_2^2 - x_1e_2e_3 - e_1x_2e_3 - e_1e_2e_3 + \\
 &U_2e_2 + ce_3^2 + x_1e_2e_3 + e_1x_2e_3 + e_1e_2e_3 + U_3e_3 - e_4^2 - x_2e_3e_4 - e_2x_3e_4 - e_2e_3e_4 + U_4e_4 + de_1e_5 + U_5e_5 = -ae_1^2 - \\
 &e_2^2 + ce_3^2 - e_4^2 + (38 - x_3)e_1e_2 + x_2e_1e_3 + e_1e_4 + 4e_1e_5 - x_3e_2e_4 - x_2e_3e_4 + U_1e_1 + U_2e_2 + U_3e_3 + U_4e_4 + U_5e_5.
 \end{aligned}$$

将 $a=10, b=28, c=-8/3, d=5$ 及控制器(5)带入, 有

$$\dot{V} = -10e_1^2 - (1+m_2)e_2^2 - (8/3+m_3)e_3^2 - (1+m_4)e_4^2 - m_5e_5^2 + (38-x_3)e_1e_2 + x_2e_1e_3 + e_1e_4 + 4e_1e_5 - x_3e_2e_4 - x_2e_3e_4.$$

当系统处于混沌态时, 由混沌系统的有界性, 存在 M , 满足 $|38 - x_3| < M, |x_2| < M, |x_3| < M$, 则

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &< -10|e_1|^2 - (1+m_2)|e_2|^2 - (8/3+m_3)|e_3|^2 - (1+m_4)|e_4|^2 - m_5|e_5|^2 + M|e_1||e_2| + M|e_1||e_3| + \\
 &|e_1||e_4| + 4|e_1||e_5| + M|e_2||e_4| + M|e_3||e_4| = -(10|e_1|^2 + (1+m_2)|e_2|^2 + (8/3+m_3)|e_3|^2 + (1+m_4)|e_4|^2 + \\
 &m_5|e_5|^2 - M|e_1||e_2| - M|e_1||e_3| - |e_1||e_4| - 4|e_1||e_5| - M|e_2||e_4| - M|e_3||e_4|) = -E^T A E.
 \end{aligned}$$

其中

$$E = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 10 & -M/2 & -M/2 & -1/2 & -2 \\ -M/2 & 1+m_2 & 0 & -M/2 & 0 \\ -M/2 & 0 & 8/3+m_3 & -M/2 & 0 \\ -1/2 & -M/2 & -M/2 & 1+m_4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix}.$$

D_i 表示矩阵 A 第 i 阶主子式, 由正定矩阵的性质, 易得 $D_1 = 10 > 0; m_2 > \frac{M^2}{40} - 1$ 时, $D_2 > 0; m_3 > \frac{M(1+m_2)}{4D_2} -$

$\frac{8}{3}$ 时, $D_3 > 0; m_4 > \frac{294(1+m_2)}{D_3} - 12$ 时, $D_4 > 0; m_5 > \frac{(1+m_2)(32-3M^2)}{3D_4}$ 时, $D_5 > 0$ 。当 $m_i (i=2, \dots, 5)$ 满足上述

条件时, 矩阵 A 正定, \dot{V} 负定, 在原点, 误差系统全局渐进稳定, 即系统(3)和系统(4), 对任意初始值, 都是完全同

步的。

1.3 数值仿真

基于 Matlab 平台,利用龙格-库塔法求解,做出仿真结果。从系统(3)、(4)的模拟图形来看,在该控制器控制下,可以快速实现系统同步。系统参数取值 $a=10, b=28, c=-8/3, d=5$, 系统(3)状态变量初始值取 $x_i(0)=1$; 系统(4)的状态变量初始值 $x_i(0)=50; (i=1, \dots, 5)$ 。图 2、图 3 的数值仿真分别为同步曲线和误差曲线。

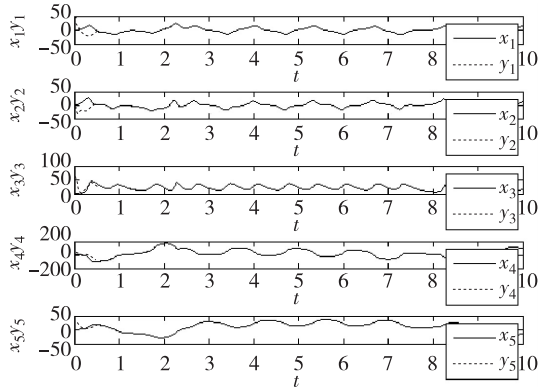


图 2 系统(3)和系统(4)的同步

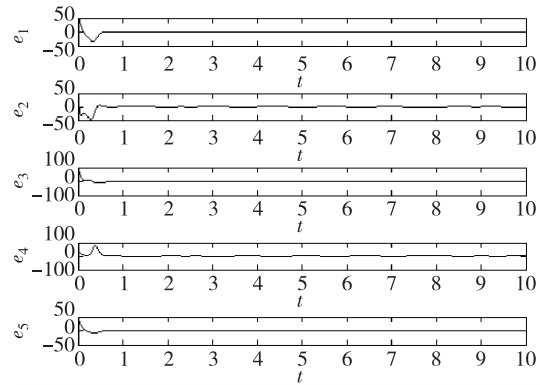


图 3 同步误差曲线

2 反同步控制

考虑驱动系统为混沌系统(1),相应的响应系统(2),不同于前文,记 $e_i = y_i + x_i$ 。由系统(1)、(2)有 $\dot{e} = g(t, x) + f(t, x) + u(t, x, y)$, 当设计控制器 u 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 则称系统(1)与系统(2)的状态达到反同步。现在来研究五维超混沌系统(3)的反同步问题^[15]。以系统(3)为驱动系统,系统(4)为响应系统,则

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_1 + ae_2 + e_4 - e_5 + U_1, \dot{e}_2 = be_1 - e_2 - x_1x_3 - y_1y_3 + U_2, \dot{e}_3 = ce_3 + x_1x_2 + y_1y_2 + U_3, \\ \dot{e}_4 &= -e_4 - x_2x_3 - y_2y_3 + U_4, \dot{e}_5 = de_1 + U_5. \end{aligned} \tag{6}$$

选取如下控制器,其中 m_i 为待定参数

$$U_1 = 0, U_2 = 2x_1x_3 - m_2e_2, U_3 = -2x_1x_2 - m_3e_3, U_4 = 2x_2x_3 + e_2e_3 - m_4e_4, U_5 = -m_5e_5. \tag{7}$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2).$$

将控制器(7)及参数带入,及混沌系统的有界性,存在 M , 李亚普诺夫函数 V 沿系统(3)、(4)对时间 t 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 + e_5\dot{e}_5 = -10e_1^2 - e_2^2 - 8/3e_3^2 - e_4^2 + 38e_1e_2 + e_1e_4 + 4e_1e_5 - (x_1x_3 + y_1y_3)e_2 + \\ &(x_1x_2 + y_1y_2)e_3 - (x_2x_3 + y_2y_3)e_4 + U_1e_1 + U_2e_2 + U_3e_3 + U_4e_4 + U_5e_5 = -10e_1^2 - (1+m_2)e_2^2 - (8/3+m_3)e_3^2 - \\ &(1+m_4)e_4^2 - m_5e_5^2 + (38+x_3)e_1e_2 - x_2e_1e_3 + e_1e_4 + 4e_1e_5 + x_3e_2e_4 + x_2e_3e_4 < -10|e_1|^2 - (1+m_2)|e_2|^2 - \\ &(8/3+m_3)|e_3|^2 - (1+m_4)|e_4|^2 - m_5|e_5|^2 + M|e_1||e_2| + M|e_1||e_3| + |e_1||e_4| + 4|e_1||e_5| + \\ &M|e_2||e_4| + M|e_3||e_4| = -E^T A E. \end{aligned}$$

其中

$$E = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 10 & -M/2 & -M/2 & -1/2 & -2 \\ -M/2 & 1+m_2 & 0 & -M/2 & 0 \\ -M/2 & 0 & 8/3+m_3 & -M/2 & 0 \\ -1/2 & -M/2 & -M/2 & 1+m_4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix}.$$

所得矩阵 A 与上文同步控制所得矩阵 A 完全相同,当 $m_2 > \frac{M^2}{40} - 1, m_3 > \frac{M(1+m_2)}{4D_2} - \frac{8}{3}, m_4 > \frac{294(1+m_2)}{D_3} - 12,$
 $m_5 > \frac{(1+m_2)(32-3M^2)}{3D_4}$ 时,矩阵 A 为正定矩阵, \dot{V} 负定。在原点,误差系统(6)全局渐进稳定,即系统(3)和系统

(4),对任意初始值,都可以实现反同步。系统参数取值 $a=10, b=28, c=-8/3, d=5$,系统(3)状态变量初始值取 $x_i(0)=1$;系统(4)的状态变量初始值 $x_i(0)=50(i=1, \dots, 5)$ 。图 4、图 5 的数值仿真分别为反同步曲线和系统(6)的曲线图形。

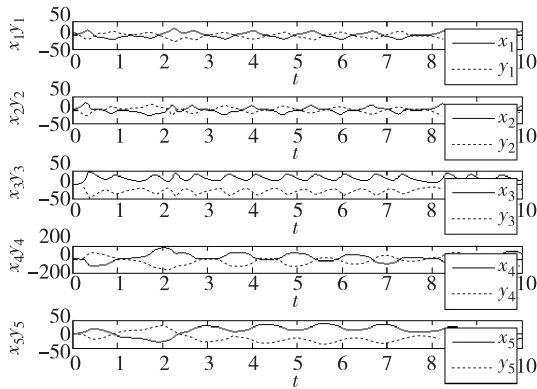


图 4 系统(3)和系统(4)的反同步

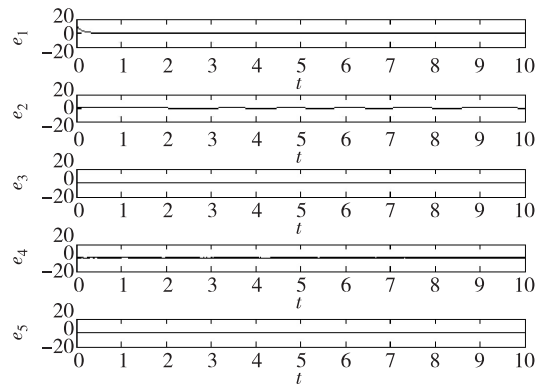


图 5 系统(6)曲线

说明:a) 数值仿真结果显示本研究所设计同步方案和反同步方案均可在短时间内实现反同步和同步。

b) 在做出数值仿真的时候,不满足文章条件的更简单控制器同样可以实现同步。图 6、7 即为所设计控制器为线性控制器,同样可以实现同步,原因是所设计方案只是充分条件,而非必要条件。而线性控制器更加简单,实际操作中更加容易,由于系统含有 3 个交叉项,在证明线性控制器同样可控同步时,给笔者造成困难。

c) 文章中的控制器,虽然实现同步,但是控制器所含状态变量不唯一,有待进一步改进。

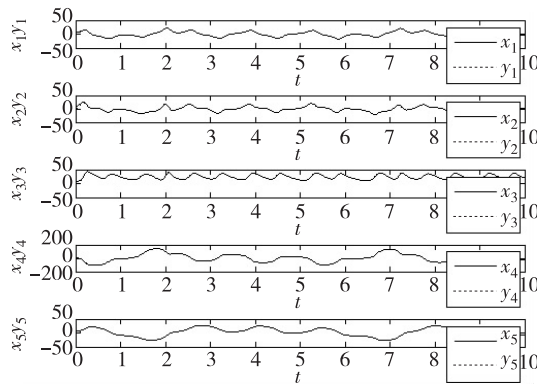


图 6 系统(3)和系统(4)的同步

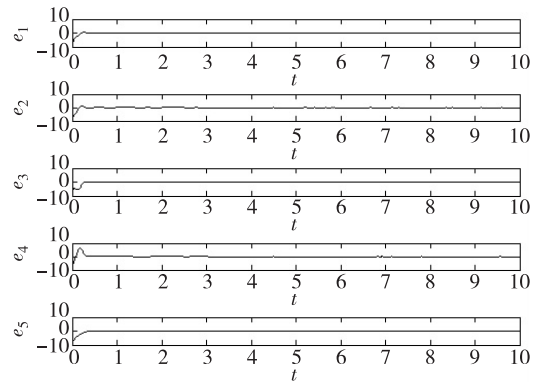


图 7 同步误差曲线

3 结束语

本文研究了一个新的五维超混沌系统的同步与反同步问题,决定控制方案的是控制器是否复杂、同步所需时间的长短、实际操作中的难易程度,本文中的控制器不是最理想的,但是这种实现同步的方法对大部分混沌系统具有参考价值,可以实现同步,具有一定的普适性。

参考文献:

[1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization of chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821-830.
 [2] Carroll T L, Pecora L M. Synchronizing chaotic circuits [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1991, 38(4): 453-456.
 [3] Chen C H, Shen L J, Cheu H K, et al. A new hyper-chaotic system and its synchronization [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2009, 10(4): 2088-2096.
 [4] Feng J W, Chen S H. Adaptive synchronization of uncertain hyperchaotic systems based in parameter identification [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26(4): 1163-1169.
 [5] Wang Z L. Anti-synchronization in two non-identical hyper-chaotic systems with known or unknown parameters [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14(5): 2366-

- 2372.
- [6] 崔浩,褚衍东,张建刚,等. 超混沌 Lorenz 系统的线性与非线性耦合同步[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2008,22(12):82-86.
Cui H, Chu Y D, Zhang J G, et al. Linear and non-linear coupling synchronization of hyperchaos Lorenz systems [J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science, 2008, 22(12): 82-86.
- [7] 罗永建,于茜,张卫东. 参数不确定时延超混沌系统的脉冲同步方法研究[J]. 物理学报,2011,60(11):110504-1-110504-8.
Luo Y J, Yu Q, Zhang W D. Research on impulsive synchronization approach of parameter uncertain hyperchaotic systems with time-delay [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(11): 110504-1-110504-8.
- [8] 王东晓,李广成. 超混沌系统的同步控制[J]. 河南科学, 2010, 28(7): 804-807.
Wang D X, Li G C. Synchronization control of hyperchaotic systems [J]. Henan Science, 2010, 28(7): 804-807.
- [9] 张学兵,赵洪涌. 不同复混沌系统的修正函数投影同步[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(2):65-68.
Zhang X B, Zhao H Y. Adaptive modified function projective synchronization of different chaotic complex systems [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(2): 65-68.
- [10] 党红刚,何万生,郭丽峰. 超混沌 Lorenz 系统的同步[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2008,22(11):104-106.
Dang H G, He W S, Guo L F. Synchronization of hyperchaotic Lorenz system [J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science, 2008, 22(11): 104-106.
- [11] 余飞,王春华,尹晋文,等. 一个具有完全四翼形式的四维混沌[J]. 物理学报,2012,61(2):020506-1-020506-9.
Yu F, Wang C H, Yin J W, et al. A 4-D chaos with fully qualified four-wing type [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(2): 020506-1-020506-9.
- [12] 魏亚东,周爱军. 一个新的五维超混沌系统的动力学分析[J]. 舰船电子工程,2012,32(7):68-70.
Wei Y D, Zhou A J. Dynamics analysis of a novel five-dimensional hyperchaotic system [J]. Ship Electronic Engineering, 2012, 32(7): 68-70.
- [13] 朱红兰. 一个超混沌系统的最优控制与同步[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(3):65-68.
Zhu H L. Optimal control and synchronization of a hyperchaotic system [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(3): 65-68.
- [14] 屈双惠,吴淑花,杨志宏,等. 一个新 4 维超混沌系统的行为特性及其同步[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2012, 36(1): 87-91.
Qu S H, Wu S H, Yang Z H, et al. The dynamic properties and adaptive synchronization of a new four-dimensional hyper-chaotic system [J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science Edition, 2012, 36(1): 87-91.
- [15] 魏亚东,周爱军. 新五维超混沌系统反同步研究[J]. 舰船电子工程,2012,32(11):33-36.
Wei Y D, Zhou A J. Research on the anti-synchronization of a novel five-dimensional hyperchaotic system [J]. Ship Electronic Engineering, 2012, 32(11): 33-36.

Research on the Synchronization of a Novel Five-dimensional Hyper-chaotic System

WANG Dongxiao, WU Dayong

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: Based on the stability theory, we studied the synchronization and anti-synchronization of a novel five-dimensional chaotic system. The nonlinear feedback synchronization approach and anti-synchronization approach are presented. And the designed controller was proved to be able to globally stabilize asymptotically the controlled system to its zero point that shows the method is feasible. Theory analysis and simulation results prove the feasibility and validity of the approach. It will be applicable in the field of chaotic secure communication.

Key words: hyper-chaotic system; synchronization; anti-synchronization; controller

(责任编辑 方 兴)