运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150104

具有安装时间和共同交货期的单机排序问题*

余 英，邓从政，曾春花
(凯里学院 数学科学学院，贵州 凯里 556011)

摘要:研究了在逆一致性条件下,工件同时具有与已加工工件的实际加工时间有关的安装时间和学习效应的一类排序问题,目标函数为最小化超前有奖延误受罚之和。由于 $1||\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 是 NP-难的,探讨了该模型的 4 类多项式时间可解的特例,并对一般情形给出了一分枝定界算法。

关键词:排序;单机;安装时间;超前;延误
中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)01-0016-06

机器长时间加工相同或类似的工件时,其熟练程度会加强,也就是工件的加工时间不再是恒定的。Cheng,Wu 和 Lee[1]考虑了工件加工时间不仅与位置有关,而且还与已加工完工件的加工时间有关的排序问题,给出了一些多项式时间可解的特例。同时,在有相当实际背景的条件下,工件的准备时间不仅受加工位置影响,而且还受已加工工件影响。Koulamas 和 Kyparisis[2]首先考虑了上述问题,并把它称为带有 p-s-d(past-sequence-dependent 的简称) 安装时间排序模型,他们证明了对于极小化最大完工时间以及极小化总完工时间等问题是多项式时间可求解的。陶明子和赵传立[3]在文献[1]的基础上进一步研究了带有 p-s-d 的安装时间的单机排序模型,证明了三类单机的排序问题是多项式时间可求解的。何少龙和赵传立[4]对带有 p-s-d 的相关问题进行探讨,并对极小化完工时间、极小化最大完工时间和以及极小化总完工时间差等目标函数的问题进行研究。Wang J. B.[5-6]等人探讨了工件的实际加工时间与已加工完工件的正常加工时间有关,且同时具有 p-s-d 安装时间的单机排序问题,并指出极小化最大完工时间,极小化总完工时间和以及极小化完工时间和的 2 次幂 $\left(\min\sum_{i=1}^{n}C_j^2\right)$ 在一般情形下是多项式时间可求解的,其最优排序为 SPT 序。Wang X. R.,Wang J. B.[7]研究了工件同时具有与已加工完工件的正常加工时间有关的学习效应和 p-s-d 安装时间的单机排序问题,并证明了四类目标函数是多项式时间可求解的。Wang J. B.,Li J. X.[8]对既与加工工件的加工位置有关,又与已加工完工件的正常完工时间有关的工件加工时间,且同时具有 p-s-d 安装时间的单机排序问题进行了研究,他们对 8 类目标函数进行了探讨,并说明了其中 4 类目标函数在一般情况下是多项式时间可求解的。

最小化超前有奖延误受罚之和的目标函数首先由 Wu C. Y. 和 Sun S. J. 在文献[9]中提出。随后 Song Z. F.[10]等,Yu Y. 等[11-12]进行了相关的研究。本文在文献[3]模型的基础上,研究了目标函数为最小化超前有奖延误受罚之和的单机排序模型,讨论其多项式时间可求解的特例和一般情形下的算法。

1 问题模型

设有 n 个工件要在一台机器上加工,机器一次只能加工一个工件,且加工不可中断。所有工件均在零时刻到达,且工件 j 的正常加工时间为 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$。若工件 j 排在第 k 个位置加工,其实际加工时间为 $a_{jk}=a_j\left(1-\dfrac{\sum_{i=1}^{k-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}$,其中 $\theta_1\geqslant1,\theta_2\leqslant0,a_{[i]}$表示排在第 i 个位置加工的工件的正常加工时间,即若第 i 个位

* **收稿日期**:2013-12-07　**修回日期**:2014-11-10　**网络出版时间**:2015-1-7 16:04
资助项目:贵州省科技厅科学技术基金(No.[2013]2260);贵州省科技厅与凯里学院 2014 年度省校合作协议项目(No. 黔科合 LH 字[2014]7232);贵州省科技厅、黔东南州科技局、凯里学院科技联合基金(No. LKK[2013]30);贵州凯里学院院级课题自然科学类重点课题(No. Z1402)
作者简介:余英,讲师,研究方向为排序理论和组合最优化,E-mail:yuying05720062@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.004.html

置加工工件 k，则有 $a_{[i]}=a_k$。在下文，把这类加工时间简记为 LE。每个工件在加工前均有与已加工工件的实际加工时间有关的安装时间，位于第 k 个位置的工件的安装时间为 $S_{[k]}=c\sum_{i=1}^{k-1}a_{[i]}^{A}$，其中 $c>0$，$a_{[i]}^{A}$ 表示排在第 i 个位置的工件的实际加工时间，加上上标 A 与排在第 i 个位置的工件的正常加工时间相区别。特别的，规定 $S_{[1]}=0$。在下文，将这类 p-s-d 的安装时间记为 S_{psd}。所有工件均有一共同交货期 $d(d\in\mathbf{Z}^{+})$，若工件在 d 之前完工，则给一奖励；反之，给一惩罚。工件 j 的超前奖因子为 β_j，超前 $E_j=\max\{0,d-C_j\}$ 延误罚因子为 α_j，延误 $T_j=\max\{0,C_j-d\}$，其中 C_j 为工件 j 的完工时间。目标函数为最小化超前有奖延误受罚之和，用三参数法可将研究的排序问题写为 $1\mid LE,S_{\mathrm{psd}},d_j\equiv d\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$。

由于 $1\,||\,\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$ 是 NP-难的问题[13]，第三部分主要考虑多项式时间可解的特殊情况，第四部分对一般情况给出一分枝定界算法。

2 预备知识

引理 1[3]　给定排序 $\pi=[1,2,\cdots,n]$，在上述加工时间和安装时间的模型下，工件 j 的完工时间为 $C_j(\pi)=\sum_{i=1}^{j}(c(j-i)+1)a_{[i]}^{A}$。

证明　因为 $\pi=[1,2,\cdots,n]$，所以 $a_{[i]}=a_i$，$S_{[i]}=S_i$，由模型的定义有

$$C_j(\pi)=\sum_{i=1}^{j}(S_i+a_i^A)=\sum_{i=1}^{j}\left(c\sum_{k=1}^{i-1}a_k^A+a_i^A\right)=\sum_{i=1}^{j}(c(j-i)+1)a_{[i]}^{A}$$

证毕

引理 2[1]　对于排序问题 $1\mid LE,S_{\mathrm{psd}}\mid\sum_{j=1}^{n}\omega_jC_j$，当工件的加工时间和工件权之间存在逆一致性条件：$a_j\leqslant a_k\Rightarrow\omega_j\geqslant\omega_k$，$\forall j\neq k,j,k=1,2,\cdots,n$ 时，工件按照 $\left\{\frac{a_j}{\omega_j}\right\}$ 的非降序（WSPT 规则）排列得到最优排序。

引理 3[4]　$\lambda\left[1-(1-y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]-\left[1-(1-\lambda y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]\geqslant 0$，其中 $1\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{y}$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$\theta_1\geqslant 1$，$\theta_2<0$，$r=1,2,\cdots,n-1$。

3 多项式时间可解特例

定理 1　若工件的正常加工时间和延误罚因子之间存在逆一致性条件：$a_j\leqslant a_k\Rightarrow\alpha_j\geqslant\alpha_k$，$\forall j\neq k,j,k=1,2,\cdots,n$，排序问题 $1|LE,S_{\mathrm{psd}},d_j\equiv d,d<\min\{a_j\mid j=1,2,\cdots,n\}\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$ 按照 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列得到最优排序。

证明　在逆一致性条件下，当 $d<\min\{a_j|j=1,2,\cdots,n\}$ 时，所有工件都误工。因此，$E_j=0(j=1,2,\cdots,n)$。所以有 $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jC_j-\sum_{j=1}^{n}\alpha_jd$，由于 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_jd$ 是常数，因此所求排序问题的最优性等价于 $1\mid LE,S_{\mathrm{psd}}\mid\sum_{j=1}^{n}\alpha_jC_j$ 的最优性。由引理 2 可知，按照 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列将得到该排序问题的一个最优排序。

证毕

由定理 1 可知，$1\mid LE,S_{\mathrm{psd}},d_j\equiv d,d<\min\{a_j\mid j=1,2,\cdots,n\}\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$ 在逆一致性条件下的算法复杂性是 $O(n\log n)$，也就是该排序问题是多项式时间可求解的。

定理 2　若工件的正常加工时间和超前奖因子之间存在逆一致性条件：$a_j\leqslant a_k\Rightarrow\beta_j\geqslant\beta_k$，$\forall j\neq k$，$j,k=1,2,\cdots,n$，排序问题 $1\left|LE,S_{\mathrm{psd}},d>\sum_{j=1}^{n}a_j,d_j\equiv d\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$ 按照 $\left\{\frac{a_j}{\beta_j}\right\}$ 的非降序排列得到最优排序。

证明　在逆一致性条件下，当 $d>\sum_{j=1}^{n}a_j$ 时，由于工件具有学习效应，所以 $C_{\max}<d$。所有工件都超前。因此，$T_j=0(j=1,2,\cdots,n)$。由此有 $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)=\sum_{j=1}^{n}\beta_jC_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_jd$，由于 $\sum_{j=1}^{n}\beta_jd$ 是常数，因此所求排序问题的最优性等价于 $1\mid LE,S_{\mathrm{psd}}\mid\sum_{j=1}^{n}\beta_jC_j$ 的最优性。由引理 2 可知，按照 $\left\{\frac{a_j}{\beta_j}\right\}$ 的非降序排列将得到该排序问题的一个最优排序。

由定理2可知，$1\left|LE,S_{\text{psd}},d>\sum_{j=1}^{n}a_j,d_j\equiv d\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 在逆一致性条件下的算法复杂性是 $O(n\log n)$，也就是该排序问题是多项式时间可求解的。 证毕

定理3 若工件的正常加工时间和延误罚因子之间存在逆一致性条件：$a_j\leqslant a_k\Rightarrow\alpha_j\geqslant\alpha_k$，$\forall j\neq k$，$j,k=1,2,\cdots,n$，排序问题 $1|LE,S_{\text{psd}},\alpha_j\equiv\beta_j,d_j\equiv d|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 按照 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列得到最优排序。

证明 假设工件 k 为跨越工件，则工件 k 前的所有工件都超前，工件 k 及其后所有工件都误工，所以有

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)=\sum_{j=1}^{k-1}-\beta_j E_j+\sum_{j=k}^{n}\alpha_j T_j=$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}-\beta_j(d-C_j)+\sum_{j=k}^{n}\alpha_j(C_j-d)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j d。$$

由于 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j d$ 是常数，所以所求排序问题的最优性等价于 $1|LE,S_{\text{psd}}|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j$ 的最优性。由引理2可知，按照 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列将得到该排序问题的一个最优排序。

由定理3可知，$1|LE,S_{\text{psd}},\alpha_j\equiv\beta_j,d_j\equiv d|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 在逆一致性条件下的算法复杂性是 $O(n\log n)$，也就是该排序问题是多项式时间可求解的。 证毕

定理4 排序问题 $1|LE,S_{\text{psd}},\alpha_j\equiv\alpha,\beta_j\equiv\beta,d_j\equiv d|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 按照SPT规则排列得到最优排序。

证明 假设 π' 为所求排序问题的一个最优排序，但它不是按照SPT规则排列的，则必存在两个相邻工件 j 和 k，满足工件 k 排在工件 j 的前面，并且 $a_j<a_k$。在工件序 π' 中，记排在工件 k 前和工件 j 后的工件对目标函数值的贡献分别为 A' 和 B'，工件 k 排在第 r 个位置，工件 j 排在第 $r+1$ 个位置。在工件序 π' 中，交换工件 j 和工件 k 的位置，得到新工序 π。记排在工件 j 前和排在工件 k 后的工件对目标函数的贡献分别为 A 和 B。记 $f(\pi)$ 和 $f(\pi')$ 分别为工件序 π 和 π' 所对应的目标函数值。$C_j(\pi)$ 表示工件序 π 中工件 j 的完工时间，$C_{[r]}^{A}(\pi)$ 表示工件序 π 中第 r 个位置的工件的实际完工时间。下面分6种情况来证明。

由引理1，在 π 和 π' 中，有

$$C_j(\pi)=C_{[r]}^{A}(\pi)=\sum_{i=1}^{r}(c(r-i)+1)a_{[i]}^{A}=\sum_{i=1}^{r-1}(c(r-i)+1)a_{[i]}^{A}+a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}$$

类似的有

$$C_k(\pi')=\sum_{i=1}^{r-1}(c(r-i)+1)a_{[i]}^{A}+a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}$$

$$C_k(\pi)=C_{[r+1]}^{A}(\pi)=\sum_{i=1}^{r+1}(c(r+1-i)+1)a_{[i]}^{A}=$$

$$\sum_{i=1}^{r-1}(c(r+1-i)+1)a_{[i]}^{A}+(c+1)a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}+a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_j}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}$$

$$C_j(\pi')=\sum_{i=1}^{r-1}(c(r+1-i)+1)a_{[i]}^{A}+(c+1)a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}+a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_k}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}$$

情形1，d 比 t 小，由定理1可知结论成立。

情形2，在序 π 中，d 在工件 j 的跨度内，在序 π' 中，d 在工件 k 的跨度内，则有

$$f(\pi)=A+\alpha(C_j(\pi)-d)+\alpha(C_k(\pi)-d)+B,f(\pi')=A'+\alpha(C_k(\pi')-d)+\alpha(C_j(\pi')-d)+B'。$$

那么 $f(\pi)-f(\pi')=A-A'+\alpha(C_j(\pi)-C_k(\pi'))+\alpha(C_k(\pi)-C_j(\pi'))+B-B'$，由目标函数的正则性可知 $B<B'$，$A=A'$，同时 $C_j(\pi)-C_k(\pi')=(a_j-a_k)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}$。因为 $a_j<a_k$，$\theta_1\geqslant 1$，$\theta_2\leqslant 0$，所以有 $(a_j-a_k)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)<0$ 成立，也就是 $C_j(\pi)\leqslant C_k(\pi')$。

$$C_j(\pi')-C_k(\pi)=(c+1)a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}+a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_k}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}-$$
$$(c+1)a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}-a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_j}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}=$$
$$c(a_k-a_j)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}+a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}-a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}+$$
$$a_k\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_j}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}-a_j\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}+a_k}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}。$$

令 $t=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$，$x=\frac{a_j}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$，$\lambda=\frac{a_k}{a_j}$，$y=\frac{x}{t}$，则

$$C_j(\pi')-C_k(\pi)=a_jt^{\theta_1}r^{\theta_2}-\lambda a_jt^{\theta_1}r^{\theta_2}+\lambda a_j(t-x)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}-$$
$$a_j(t-\lambda x)^{\theta_1}(r+1)^{\theta_2}+c(a_k-a_j)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}=$$
$$a_jt^{\theta_1}r^{\theta_2}\left\{\left[1-(1-\lambda y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]-\lambda\left[1-(1-y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]\right\}+c(a_k-a_j)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}。$$

因为 $a_j<a_k$，$\theta_1\geqslant1$，$\theta_2\leqslant0$，所以有 $c(a_j-a_k)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\theta_1}r^{\theta_2}\leqslant0$ 成立。由引理 2 有

$$a_jt^{\theta_1}r^{\theta_2}\left\{\left[1-(1-\lambda y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]-\lambda\left[1-(1-y)^{\theta_1}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\theta_2}\right]\right\}\leqslant0$$

成立，所以 $C_k(\pi)\leqslant C_j(\pi')$。因此有 $f(\pi)-f(\pi')\leqslant0$，也就是交换后目标函数值变小了或者不变。由此可知，结论成立。

情形 3，在序 π 中，工件 j 正好被加工完，在序 π' 中，d 在工件 k 的跨度内

$$f(\pi)=A+\alpha(C_k(\pi)-d)+B,f(\pi')=A'+\alpha(C_k(\pi')-d)+\alpha(C_j(\pi')-d)+B'。$$

那么 $f(\pi)-f(\pi')=A-A'+\alpha(C_k(\pi)-C_j(\pi'))-\alpha(C_k(\pi')-d)+B-B'$，因为 $A=A'$，$C_k(\pi)\leqslant C_j(\pi')$，$C_k(\pi')-d\geqslant0$，$B\leqslant B'$，所以有 $f(\pi)-f(\pi')\leqslant0$，也就是交换后目标函数值变小了或者不变。由此可知，结论成立。

情形 4，在序 π 中，d 在工件 k 的跨度内，在序 π' 中，工件 k 正好被加工完

$$f(\pi)=A-\beta(d-C_j(\pi))+\alpha(C_k(\pi)-d)+B,f(\pi')=A'+\alpha(C_j(\pi')-d)+B'。$$

那么 $f(\pi)-f(\pi')=A-A'+\alpha(C_k(\pi)-C_j(\pi'))-\beta(d-C_j(\pi))+B-B'$，因为 $A=A'$，$C_k(\pi)\leqslant C_j(\pi')$，$d-C_j(\pi)\geqslant0$，$B\leqslant B'$，所以有 $f(\pi)-f(\pi')\leqslant0$，也就是交换后目标函数值变小了或者不变。由此可知，结论成立。

情形 5，在序 π 中，d 在工件 k 的跨度内，在序 π' 中，d 在工件 j 的跨度内

$$f(\pi)=A-\beta(d-C_j(\pi))+\alpha(C_k(\pi)-d)+B,f(\pi')=A'-\beta(d-C_k(\pi'))+\alpha(C_j(\pi')-d)+B'。$$

那么 $f(\pi)-f(\pi')=A-A'+\alpha(C_k(\pi)-C_j(\pi'))+\beta(C_j(\pi)-C_k(\pi'))+B-B'$，因为 $A=A'$，$C_k(\pi)\leqslant C_j(\pi')$，$C_j(\pi)\leqslant C_k(\pi')$，$B\leqslant B'$，所以有 $f(\pi)-f(\pi')\leqslant0$，也就是交换后目标函数值变小了或者不变。由此可知，结论成立。

情形 6，d 在工件 j，k 加工完之后，由定理 2 可知结论成立。

由定理 4 可知，$1\mid LE,S_{\mathrm{psd}},\alpha_j\equiv\alpha,\beta_j\equiv\beta,d_j\equiv d\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha_jT_j-\beta_jE_j)$ 在逆一致性条件下的算法复杂性是 $O(n\log n)$，也就是该排序问题是多项式时间可求解的。　　证毕

4 一般情况的分枝定界算法

不失一般性，假设 $\min\limits_j\{a_j,j=1,2,\cdots,n\}<d<\sum_{j=1}^{n}a_j$。

4.1 分枝

按从上到下的方法建立一棵搜索树:第0层没有任何一个工件排于 n 个位置上;第一层中共有 n 个节点,在每个节点对应的部分序中,第一个位置的工件已排定,其余位置的工件待定;第二层中每个节点又可产生 $n-1$ 个节点,在每个节点对应的部分序中,第一、二个位置的工件已排定,其余位置的工件序待定,因此第二层共有 $n\times(n-1)$ 个节点,依次类推,直至第 n 层。实际上不需要全部分枝,可以按照下面剪枝规则来除去多余的枝。

4.2 确定上界

将所有工件按 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列得到 π_1;按 $\left\{\frac{a_j}{\beta_j}\right\}$ 的非降序排列得到 π_2。将 π_1 中的超前工件按 $\left\{\frac{a_j}{\beta_j}\right\}$ 的非降序排列,其余工件序不变得到 π_1';同理,将 π_2 中的延误工件按 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列,其余工件序不变得到 π_2'。分别记 π_1' 与 π_2' 对应的目标函数值为 $F(\pi_1')$ 和 $F(\pi_2')$,则所研究排序问题的上界可取为 $F=\min\{F(\pi_1'),F(\pi_2')\}$,对应的序为当前最优排序。

4.3 剪枝规则

从第二层开始可以考虑剪枝。剪枝的方法如下:

1) 若已排工件的最后一个工件的完工时间不小于 d,则无需分枝,剩余工件按 $\left\{\frac{a_j}{\alpha_j}\right\}$ 的非降序排列;

2) 若已排工件对应的目标函数值超过上界 F,则剪枝;

3) 若已排工件的最后一个工件的完工时间小于 d,且已排工件中工件不是按 $\left\{\frac{a_j}{\beta_j}\right\}$ 的非降序排列的,则剪枝。

根据上述过程,得到几个工件序,然后求出其对应的目标函数值,记为 F',若 $F'<F$,则 F' 对应的序为最优排序;若 $F'\geqslant F$,则 F 对应的序为最优排序。

对该分枝定界算法,下面给出一个实例。

已知有4个工件,其相关参数见表1,请用分枝定界算法给出排序问题

$$1\mid LE,S_{\mathrm{psd}},d_j\equiv d\mid \sum\nolimits_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$$

的一个最优排序。

表1 4个工件的相关参数

Tab.1 The ralative parametres of four jobs

工件 i	1	2	3	4
加工时间 a_i	6	9	11	12
延误罚因子 α_i	9	5	12	8
超前奖因子 β_i	5	7	4	6

其中 $d=30,\theta_1=1,\theta_2=-1,c=1$,且运算过程中采用四舍五入技巧精确到小数点后一位。

由第4.2节可以得到序 $\pi_1=[1,3,4,2]$,$\pi_2=[1,2,4,3]$ 以及 $\pi_1'=[1,4,3,2]$,$\pi_2'=[1,2,4,3]$,且 $F(\pi_1')=-128.2$,$F(\pi_2')=-128.2$,因此有 $F=-128.2$,相应的工件序为 $\pi_1'=[1,4,3,2]$ 或者 $\pi_2'=[1,2,4,3]$。

由第4.1节可知,在搜索树的第一层,有4个点:(1,×,×,×),(2,×,×,×),(3,×,×,×),(4,×,×,×)。在搜索树的第二层,有12个点

(1,2,×,×),(1,3,×,×),(1,4,×,×),(2,1,×,×),(2,3,×,×),(2,4,×,×),
(3,1,×,×),(3,2,×,×),(3,4,×,×),(4,1,×,×),(4,2,×,×),(4,3,×,×)。

根据4.3节中的3)可剪去以下6个枝

(2,1,×,×),(3,1,×,×),(3,2,×,×),(3,4,×,×),(4,1,×,×),(4,2,×,×)。

在搜索树的第三层有12个点

(1,2,3,×),(1,2,4,×),(1,3,4,×),(1,3,2,×),(1,4,2,×),(1,4,3,×),
(2,3,1,×),(2,3,4,×),(2,4,1,×),(2,4,3,×),(4,3,2,×),(4,3,1,×)。

根据4.3中的3)可剪去以下4个枝:(1,3,4,×),(1,3,2,×),(1,4,2,×),(2,3,1,×)。

在搜索树的第四层,有8个点

(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,4,3,2),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(2,4,3,1),(4,3,2,1),(4,3,1,2)。

根据计算比较可得最优排序为 $\pi=[1,2,3,4]$,相应的最优值为 -142.6。

5 结论

考虑了在逆一致性条件下,工件具有与已加工工件的实际加工时间有关的安装时间和共同交货期的单机排

序问题，目标函数为最小化超前有奖延误受罚总和。由于 $1||\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 是NP-难的问题，本文给出了四类多项式时间可解的特例。而对一般情形，给出了一个分枝定界算法。排序问题 $1|LE,S_{psd},d_j\equiv d|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ 的近似算法有待进一步探讨。

参考文献：

[1] Cheng E T C, Wu C C, Lee W C. Some scheduling problems with sum-of-processing-times-baseasedd and job position based learning effect[J]. Information Science, 2008, 17(8): 2476-2487.

[2] Koulamas C, Kyparisis G J. Single-machine scheduling problem with past-sequence-dependent setup times [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 187: 68-72.

[3] 陶明子，赵传立. 具有安装时间和学习效应的单机排序问题[J]. 运筹与管理，2010，19(4)：101-107.
Tao M Z, Zhao C L. Single machine scheduling problems with setup time and learning effects[J]. Operations Research and Management Science, 2010, 19(4): 101-107.

[4] 何少龙，赵传立. 有安装时间的单机排序问题[J]. 沈阳师范大学学报：自然科学版，2011，29(2)：138-141.
He S L, Zhao C L. single machine scheduling problems with proportional setup times[J]. Journal of Shenyang Normal University: Natural Science, 2011, 29(2): 138-141.

[5] Wang J B. Single machine scheduling with past-sequence-dependent setup times and time-dependent learning effect. Computers & Industrial Engineering, 2008, 55(3): 584-591.

[6] Wang J B, Wang D, Wang L Y, et al. Single machine scheduling with exponential time-dependent learning effect and past-sequence-dependent setup times[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(1): 9-16.

[7] Wang X R, Wang J B. Scheduling with past-sequence-dependent setup times and learning effects on a single machine[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 48: 739-746.

[8] Wang J B, Li J X. Single machine past-sequence-dependent setup times scheduling with general position-dependent and time-dependent learning effects[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35: 1388-1395.

[9] Wu C Y, Sun S J. A sequencing problem in loading and unloading goods[J]. OR Transaction, 2000, 4(4): 1-11.

[10] Song Z F, Sun S J, Wu C Y. A scheduling problem with earliness award and tardiness penalty[J]. Operations Research Transaction, 2002, 6(4): 31-36.

[11] 余英，罗永超，程明宝. 带分批的一类具有恶化加工时间的排序问题的算法研究[J]. 湘潭大学学报：自然科学版，2013，35(2)：14-16.
Yu Y, Luo Y CH, Cheng M B. the algorithm of a batching scheduling problem with deteriorating processing time [J]. Journal of Xiangtan University: Natural Science, 2013, 35(2): 14-16.

[12] Yu Y, Lu Z, Sun S J, et al. Scheduling problems on tardiness penalty and earliness award with simply linear processing time[J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2009, 13(2): 123-128.

[13] Yuan J J. The NP-hard ness of the single machine common due date weighted tardiness problem[J]. System science and Mathematical Science, 1992, 5: 328-333.

Operations Research and Cybernetics

A Scheduling Problem with Setup Times and Common Due Date in a Single Machine

YU Ying, DENG Congzheng, ZENG Chunhua

(Department of Mathematical Sciences, Kaili College, Kaili Guizhou 556011, China)

Abstract: A scheduling problem with past sequence-dependent setup times and learning effects under inverse agreeable ratio condition to minimize the total tardiness penalty and earliness award is studied. Due to $1||\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j T_j-\beta_j E_j)$ is NP-hard, four polynomial time solvable cases are studied, and a branch and bound algorithm is given to common condition.

Key words: scheduling problem; single machine; setup times; earliness; tardiness

（责任编辑　黄　颖）