DOI:10.11721/cqnuj20150112

一类本原不可幂定号有向图的基*

杨盼足，邵燕灵
(中北大学 数学系，太原 030051)

摘要:本原不可幂定号有向图 S 的基指数 $l(S)$ 是指最小的正整数 l,使得在 S 中,从任意一点 u 到任意一点 v 都存在一对长为 l 的 *SSSD* 途径。本文对一类包含 3 个圈的本原不可幂定号有向图进行研究。通过讨论图中从任意一点 u 到任意一点 v 是否存在 *SSSD* 途径,从而得到了此类图的基的上界,再运用反证法求得了这类图的基。进一步讨论得到了另一类包含 3 个圈的本原不可幂定号有向图的基。

关键词:基;本原指数;定号有向图;*SSSD* 途径

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)01-0064-04

1 研究背景及基本概念

在非负矩阵的研究领域中,非负矩阵幂指数的研究是一个重要而具有实际意义的课题,在信息科学、计算机科学以及通讯网络的信息传递问题等许多方面都有具体的应用背景。符号模式矩阵及其定号有向图的基是非负矩阵幂指数研究的推广。文献[1]首先提出了符号模式矩阵基的概念,文献[2]将可幂符号模式矩阵的基和周期的概念推广到不可幂符号模式矩阵的基和周期的概念,并将符号模式矩阵和定号有向图一一对应起来。图论在非负矩阵的研究中起着重要作用,文献[2-3]利用图论的证明方法,对符号模式矩阵的伴随定号有向图进行了研究。本文利用图论的方法研究得到了一类含有 3 个圈的本原不可幂定号有向图的基。下面先介绍一些关于图论的基本概念。

设 D 是一个有向图(可以有环),若存在正整数 k,使得对 D 的任意顶点 x,y(可以相同)都存在从 x 到 y 的 k 长途径,则称 D 为本原有向图。最小的 k 称为 D 的本原指数,记为 $\exp(D)$。设 v 是 D 的一个顶点,若存在正整数 t,使得对 D 中的任意顶点 u,都存在从 v 到 u 的 t 长途径,最小的 t 称为顶点 v 的点指数,记为$\exp_D(v)$。如果给 D 的每条弧规定了符号(+或−),所得的图称为定号有向图,用 S 表示,图 D 称为 S 的基础图。若 D 是本原的,则称 S 为本原定号有向图。定号有向图的一条途径 W 由一系列的弧 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 组成,且 e_i 的终点是 e_{i+1} 的起点($i=1,2,\cdots,k-1$)。这条途径 W 的符号定义为 $\prod_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(e_i)$,用 $\operatorname{sgn} W$ 表示[1-4]。

定义 1[3]　在定号有向图 S 中,若存在两条途径有相同的起点、相同的终点、相同的长度,但符号不同,则称这两条途径是一对 *SSSD* 途径。

定义 2[4]　在定号有向图 S 中,若存在从顶点 v_i 到顶点 v_j 的 *SSSD* 途径,则称 S 为不可幂定号有向图,否则称 S 是可幂的。

定义 3[5]　在本原不可幂定号有向图 S 中,如果存在正整数 l,使得 S 的任意顶点 v_i 和 v_j(可以相同),从 v_i 到 v_j 都有长为 l 的 *SSSD* 途径对,则最小的 l 称为图 S 的基,记为 $l(S)$。

2 预备知识

引理 1[6]　设 S 是一个本原定号有向图,则 S 不可幂当且仅当 S 包含一对长度分别是 p_1 和 p_2 的圈 C_1 和

*　**收稿日期**:2013-05-14　　**修回日期**:2014-09-14　　**网络出版时间**:2015-1-7 16:04
资助项目:国家自然科学基金(No. 11071227);山西省回国留学人员科研基金(No. 2012-070)
作者简介:杨盼足,男,研究方为组合数学,E-mail: yangpanzu@126.com;**通讯作者**:邵燕灵,E-mail:ylshao@nuc.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.012.html

C_2，并且满足下列两条件之一：1) p_1 为奇数，p_2 为偶数，且 $\operatorname{sgn} C_2=-1$；2) p_1，p_2 同为奇数，且 $\operatorname{sgn} C_1=-\operatorname{sgn} C_2$。

为方便起见，满足条件 1) 或 2) 的圈对 C_1 和 C_2 就称为"异圈对"，很容易证明，闭途径对 $W_1=p_2C_1$ 和 $W_2=p_1C_2$ 有相同的长度，但符号不同 $(\operatorname{sgn}(C_1))^{p_2}=-(\operatorname{sgn}(C_2))^{p_1}$。

引理 2[7]　设 $a_1,\cdots,a_k$ 都为正整数，定义 Frobenius 数集 $S(a_1,\cdots,a_k)=\{r_1a_1+\cdots+r_ka_k \mid r_1,\cdots,r_k$ 都是非负整数$\}$。如果 $\gcd(a_1,\cdots,a_k)=1$，那么 $S(a_1,\cdots,a_k)$ 包含所有足够大的正整数。在这种情况下，存在整数 φ 对所有的整数 $m(m>\varphi)$，使得 $m\in S(a_1,\cdots,a_k)$。称满足上述条件的最小整数 φ 为 Frobenius 数，记为 $\varphi(a_1,\cdots,a_k)$。

由上述定义有 $\varphi(a_1,\cdots,a_k)-1\notin S(a_1,\cdots,a_k)$。当 $k=2$ 时，有 $\varphi(a_1,a_2)=(a_1-1)(a_2-1)$。

设 $R=\{l_1,\cdots,l_k\}$ 为本原有向图 D 的圈长集合，且 $\gcd(l_1,\cdots,l_k)=1$。对于 D 中的任意顶点 x 和顶点 y，用 $d(x,y)$ 表示从 x 到 y 的距离。$d_R(x,y)$ 表示从 x 到 y 接触 R 中每一长度的圈的最小距离。则有

$$\exp_D(v)\leqslant\varphi(l_1,\cdots,l_k)+\max_{u\in V(D)}d_R(v,u),v\in V(D)。$$

引理 3[7]　令 S 是一个本原不可幂定号有向图，W_1，W_2 是由点 u 到点 v 的一对长为 $r_{u,v}$ 的 $SSSD$ 途径对，$d(S)$ 是图 S 的直径，则有 $l(S)\leqslant d(S)+r_{u,v}+\exp(v)$。

3 主要结果

定理 1　图 1 为本原不可幂定号有向图 S_1 的基础图，其中 D 包含两个 m 长的圈 C_1 和 C_1'，及一个 n 长的圈 $C_2(m>n\geqslant1$ 且 m,n 互素；$1\leqslant s\leqslant n-1)$，则：

1) 当两个 m 长的圈 C_1，C_1' 异号时，$l(S_1)=mn+m-s+1$；

2) 当两个 m 长的圈 C_1，C_1' 同号时，$l(S_1)=2mn+m-2s$。

证明　1) 当两个 m 长的圈 C_1，C_1' 异号时，则 S_1 存在由点 $v_{n+m-s-1}$ 到点 v_1 的 $SSSD$ 途径对，且 $r_{v_{n+m-s-1},v_1}=2$。注意到 $\exp_D(v_1)\leqslant\varphi(m,n)+\max\limits_{u\in V(D)}d_R(v_1,u)=(m-1)(n-1)+m-1=(m-1)n$，而 $d(S_1)=m+n-s-1$，由引理 3 可得 $l(S_1)\leqslant d(S_1)+r_{v_{n+m-s-1},v_1}+\exp(v_1)\leqslant m+n-s-1+2+(m-1)n=mn+m-s+1$。

下面证明点 v_{s-1} 到点 v_{n-1} 不存在长为 $k=mn+m-s$ 的 $SSSD$ 途径。假设 W 是 v_{s-1} 到 v_{n-1} 的一条 k 长途径，则 W 必然经过一条由点 v_{s-1} 到点 v_{n-1} 的 $n-s$ 长的途径以及若干圈 m 长的圈和至少一圈 n 长的圈。设经过 m 长的圈共 a 圈，经过 n 长的圈共 b 圈，则

$$k=l(W_1)=n-s+am+bn,(a\geqslant0;b\geqslant1),am+bn=mn+m-n,(a-1)m=(m-b-1)n。$$

因为 $m>n\geqslant1$ 且 m,n 互素，所以令 $a-1=nx$，则 $mx=m-b-1$，即 $m\mid(m-b-1)$，而 $(m-b-1)<m$，所以 $(m-b-1)=0$ 且 $x=0$，即 $a=1$。这说明途径 W 只过一圈 m 长的圈。从而得证点 v_{s-1} 到点 v_{n-1} 不存在长为 $k=mn+m-s$ 的 $SSSD$ 途径。所以 $l(S_1)\geqslant mn+m-s+1$。

综上所述 $l(S_1)=mn+m-s+1$。

2) 当两个 m 长的圈 C_1，C_1' 同号时，首先证明图 S_1 中存在起点为 v_s，终点为 v_n 的 $SSSD$ 途径对。令 Q_1，Q_2 是点 v_s 到 v_n 的两条不同长的途径，Q_1，Q_2 的长度分别为 $m-s$ 和 $n-s$，p 是点 v_n 到 v_s 的一条长为 s 的公共途径。

令 $\begin{cases}W_1=Q_1+(n-1)C_1\\W_2=Q_2+(m-1)C_2\end{cases}$，则 $\begin{cases}W_1+P=nC_1\\W_2+P=mC_2\end{cases}$。由于 S 是不可幂的，所以 $(\operatorname{sgn}(C_1))^n=-(\operatorname{sgn}(C_2))^m$，也就是说 nC_1 与 mC_2 的符号不同。又因为 p 是公共途径，所以 $\operatorname{sgn} W_1=-\operatorname{sgn} W_2$，并且 W_1，W_2 的长度都是 $mn-s$，起终点相同。由此可得 W_1，W_2 是起点为 v_s，终点为 v_n 的 $SSSD$ 途径对，$r_{v_s,v_n}=mn-s$。注意到

$$\exp_D(v_n)\leqslant\varphi(m,n)+\max_{u\in V(D)}d_R(v_n,u)=(m-1)(n-1)+m=mn-n+1,$$

而 $d(S_1)=m+n-s-1$，则根据引理 3 可得

$$l(S_1)\leqslant d(S_1)+r_{v_s,v_n}+\exp(v_n)\leqslant m+n-s-1+mn-s+mn-n+1=2mn+m-2s。$$

下面证明 $l(S_1)\geqslant 2mn+m-2s$。

情形 1，当 $\frac{n}{2}<s$ 时，$n-s<s$。下面证明点 $v_{s-(n-s)}$ 到点 $v_{n+m-s-1}$ 不存在长为 $k=2mn+m-2s-1$ 的 $SSSD$ 途径。

假设 W_1,W_2 是 $v_{s-(n-s)}$ 到 $v_{n+m-s-1}$ 的两个 k 长途径。则 W_1,W_2 都经过点 $v_{s-(n-s)}$ 到点 $v_{n+m-s-1}$ 的 $n-s+m-s-1$ 长的途径以及至少一圈 m 圈与若干圈 n 圈。即

$$k=l(W_1)=n-s+m-s-1+a_1m+b_1n,k=l(W_2)=n-s+m-s-1+a_2m+b_2n,$$

其中 $a_i\geqslant 1,b_i\geqslant 0,i=1,2$,则有 $(a_2-a_1)m=(b_1-b_2)n$,因为 m,n 互素,令 $b_1-b_2=mx$,则 $a_2-a_1=nx$,则 $x=0$。

假设 $x\geqslant 1$,因为 $a_1\geqslant 1$ 则 $a_2\geqslant n+1$,则 $k=l(W_2)=n-s+m-s-1+[a_2-(n+1)]m+b_2n+mn+m$,则有 $[a_2-(n+1)]m+b_2n=mn-m-n$。然而

$$\varphi(m,n)-1=(m-1)(n-1)-1=mn-m-n=[a_2-(n+1)]m+b_2n。$$

由此可得 $\varphi(m,n)-1\in S(m,n)$,这与 $\varphi(m,n)-1\notin S(m,n)$ 矛盾。因此有 $x=0$。

同理可证 $x\leqslant -1$ 也不成立。

所以证得 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$,则 $\mathrm{sgn}(W_1)=\mathrm{sgn}(W_2)$。这说明点 $v_{s-(n-s)}$ 到 $v_{n+m-s-1}$ 不存在长为 $k=2mn+m-2s-1$ 的 *SSSD* 途径,所以 $l(S_1)\geqslant 2mn+m-2s$。

情形2,当 $\frac{n}{2}\geqslant s$ 时,$n-s\geqslant s$。类似情形1,同样可证明点 v_{2s} 到 $v_{n+m-s-1}$ 不存在长为 $k=2mn+m-2s-1$ 的 *SSSD* 途径,所以 $l(S_1)\geqslant 2mn+m-2s$。

综上所述 $l(S_1)=2mn+m-2s$。 证毕

定理2 图2为本原不可幂定号有向图 S_2 的基础图,其中 D 包含两个 m 长的圈 C_1 和 C_1',及一个 n 长的圈 C_2($m>n\geqslant 1$ 且 m,n 互素;$1\leqslant s\leqslant n-1$),点 $v_{n+m-s-t+1}$ 到 v_1 存在两条 $t(2\leqslant t\leqslant n-s+1)$ 长的途径,则:

1)当两个 m 长的圈 C_1,C_1' 异号时,$l(S_2)=mn+m-s+t-1$;

2)当两个 m 长的圈 C_1,C_1' 同号时,$l(S_1)=2mn+m-2s$。

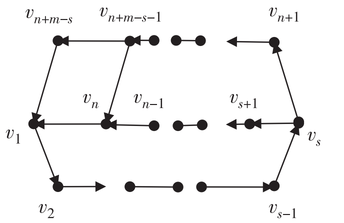

图1 s_1 的基础图 D

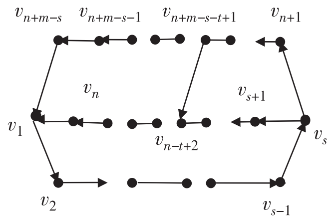

图2 s_2 的基础图 D

证明 1)当两个 m 长的圈 C_1,C_1' 异号时,则 S_2 存在以 $v_{n+m-s-t+1}$ 为起点,以 v_1 为终点的 *SSSD* 途径对,且 $r_{v_{n+m-s-t+1},v_1}=t$。由定理1得 $\exp_D(v_1)\leqslant(m-1)n,d(S_2)=m+n-s-1$。根据引理3可得

$$l(S_2)\leqslant d(S_2)+r_{v_{n+m-s-t+1},v_1}+\exp(v_1)\leqslant m+n-s-1+t+(m-1)n=mn+m-s+t-1。$$

下面证明,$l(S_2)\geqslant mn+m-s+t-1$。

情形1,当 $t-1<s+1$ 时,点 v_{s+1} 到点 v_{t-1} 不存在长为 $k=mn+m-s+t-2$ 的 *SSSD* 途径。假设 W 是 v_{s+1} 到 v_{t-1} 的一个 k 长途径。则 W 必然经过由点 v_{s+1} 到点 v_{t-1} 的一条 $n-s+t-2$ 长的途径以若干圈 C_1,C_1' 和若干圈 C_2。设经过 C_1 与 C_1' 共 a 圈,经过 C_2 共 b 圈,则

$$k=l(W_1)=n-s+t-2+am+bn(a\geqslant 0,b\geqslant 0),$$

$$k=l(W_1)=n-s+t-2+am+bn=mn+m-s+t-2,(a-1)m=(m-1-b)n。$$

因为 $m>n\geqslant 1$ 且 m,n 互素,令 $a-1=nx$,则 $mx=m-1-b$,则 $m|(m-1-b)$,而 $(m-1-b)<m$,所以 $(m-b-1)=0$ 且 $x=0$,即 $a=1$。这说明途径 W 只过一圈 C_1。从而得证点 v_{s+1} 到点 v_{t-1} 不存在长为 $k=mn+m-s+t-2$ 的 *SSSD* 途径。所以 $l(S_2)\geqslant mn+m-s+t-1$。

情形2,当 $t-1\geqslant s+1$ 时,$t-s-2\geqslant 0$。同样能证明点 $v_{s+1-(t-s-2)}$ 到点 v_{s+1} 不存在长为 $k=mn+m-s+t-2$ 的 *SSSD* 途径。所以 $l(S_2)\geqslant mn+m-s+t-1$。

综上所述 $l(S_2)=mn+m-s+t-1$。

2)当两个 m 长的圈 C_1、C_1' 同号时,首先利用定理1中的证明方法,可以证明图 S_2 中存在起点为 v_s 终点为 v_{n-t+2} 的 *SSSD* 途径对。且 $r_{v_s,v_{n-t+2}}=mn-s-t+2$。根据引理2得

$$\exp_D(v_{n-t+2})\leqslant\varphi(m,n)+\max_{u\in V(D)}d_R(v_{n-t+2},u)=(m-1)(n-1)+m+t-2=mn-n+t-1。$$

而 $d(S_2)=m+n-s-1$,则根据引理 3 可得 $l(S_2)\leqslant d(S_2)+r_{v_s,v_{n-t+2}}+\exp(v_{n-t+2})\leqslant 2mn+m-2s$。

然后,利用定理 1 中 2)的证明方法,同样能证明 $l(S_1)\geqslant 2mn+m-2s$。

综上所述 $l(S_1)=2mn+m-2s$。 证毕

参考文献:

[1] Li Z, Hall F, Eschenbach C. On the period and base of a sign pattern matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1994, 212/213: 101-120.

[2] Liu B L, You L H. Bound on the base of primitive nearly reducible sign pattern matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2006, 418: 863-881.

[3] Shao Y L, Gao Y B. The local bases of primitive non-powerful signed symmetric digraphs with loops[J]. Ars Combinatoria, 2009, 90: 357-369.

[4] Yu G L, Miao Z K, Shu J L. Bases of primitive non-powerful sign patterns[J]. Theoretical Computer Science, 2012, 447: 136-143.

[5] Gao Y B, Huang Y H, Shao Y L. Bases of primitive non-powerful signed symmetric digraphs with loops[J]. Ars Combinatoria, 2009, 90: 383-388.

[6] Wang L Q, Miao Z K, Yan C. Local bases of primitive non-powerful signed digraphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 748-754.

[7] You L H, Shao J Y, Shan H Y. Bounds on the bases of irreducible generalized sign pattern matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 427: 285-300.

The Bases of a Class of Primitive Non-powerful Signed Digraphs

YANG Panzu, SHAO Yanling

(School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The base of a primitive non-powerful signed digraph$S$, denoted by X, is a least integer X_λ such that there is a pair of $SSSD$ walks of length $\{A_\lambda\}$ from each vertex A_λ to each vertex v in S. In this work, the bases of a class of primitive non-powerful signed digraphs that contain three circles are studied. First through the discussion of whether there is a pair of $SSSD$ walks from each vertex A_λ to each vertex v in the digraph, we get the upper bound of the bases. Then by using the proof by contradiction, we get the value of the bases. We also obtain the bases of another class of primitive non-powerful signed digraphs that contain three circles.

Key words: base; exponent; signed digraph; $SSSD$ walk

(责任编辑 黄 颖)