DOI:10.11721/cqnuj20150113

M-矩阵 Fan 积的特征值下界*

陈 付 彬

(昆明理工大学 津桥学院 工学系，昆明 650106)

摘要:本文利用 Brauer 卵形定理和 Cauchy-Schwitz 不等式给出了两个非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积的最小特征值下界的新估计式 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_A^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_B^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}$。此下界估计式比现有几个估计式更为精确。通过数值算例计算得 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant 2.7834$，与其他文献中的结果加以比较，表明所得的新估计结果在一定条件下改进了 Horn 和 Johnson 给出的经典结果，同时也改进了其他已有的几个结果，比其他结果接近 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})$ 的真值。

关键词:M-矩阵;Fan 积;特征值;下界

中图分类号:O151.21　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2015)01-0068-04

M-矩阵是一类重要的特殊矩阵，生物学和物理学等领域中的许多问题都与之有着密切的联系。矩阵 Fan 积是矩阵乘积中的一种特殊乘积[1]，在周期函数卷积的三角矩阵和组合论中结合方案及算子理论等方面的研究中有着广泛的应用。近些年来，关于两个非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 的最小特征值下界的估计成为很多学者广泛关注和研究的问题，并且得到了一些相关的估计式[2-6]。本文在前人所做工作的基础上针对这一问题做进一步的探讨，得到一个关于非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 的最小特征值下界的一个更加精确的新估计式。

1 预备知识

对任一个正整数 n，记 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n\}$，用 $\mathbf{C}^{n\times n}(\mathbf{R}^{n\times n})$ 表示 n 阶复(实)矩阵集。若 $a_{ij}\geqslant 0(a_{ij}>0)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是非负矩阵(正矩阵)，记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0(\boldsymbol{A}>0)$。记 $\sigma(\boldsymbol{A})=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 表示由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值组成的集合，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱。特征值的模的最大值称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，记为 $\rho(\boldsymbol{A})$。

记 $\boldsymbol{Z}_n=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}\,|\,a_{ij}\leqslant 0,i,j\in\mathbf{N},i\neq j\}$，称 $\boldsymbol{Z}_n$ 中的矩阵为 Z-矩阵。若 $\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}\geqslant 0$，$\alpha>\rho(\boldsymbol{P})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异 M-矩阵；若 $\alpha=\rho(\boldsymbol{P})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异 M-矩阵。记 M_n 为 n 阶非奇异 M-矩阵的集合。

令 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Z}_n$，记 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$ 由文献[2]中的结论可知：$\tau(\boldsymbol{A})\in\sigma(\boldsymbol{A})$。称 $\tau(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值。

设 $\boldsymbol{A}$ 是非负矩阵，则存在正向量 u,v 使得 $\boldsymbol{A}u=\rho(\boldsymbol{A})u$，$v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\rho(\boldsymbol{A})v^{\mathrm{T}}$；其中 u 和 v 分别称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右 Perron 特征向量和左 Perron 特征向量。

假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积定义为 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，$c_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}b_{ij},i\neq j\\ a_{ij}b_{ij},i=j\end{cases}$，由文献[2]中的结论可知：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$，则 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}\in M_n$。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为 n 阶非负矩阵，令 $r>0$，记 $\boldsymbol{A}^{(r)}=(a_{ij}^r)$，称 $\boldsymbol{A}^{(r)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 次 Hadamard 幂。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$，令 $\boldsymbol{J}_A=\boldsymbol{D}^{-1}\mathbf{N}$，其中 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{ii})$，$\mathbf{N}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$，显然 $\boldsymbol{J}_A$ 是非负矩阵。

1991 年，Horn 等人在文献[2]中首先给出关于两个非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 的最小特征值

* 收稿日期:2013-07-25　修回日期:2014-10-07　网络出版时间:2015-1-7 16:04
资助项目:云南省教育厅科学研究基金项目(No. 2012Y427; No. 2013C165)
作者简介:陈付彬，男，副教授，研究方向矩阵理论及其应用，E-mail: chenfubinyn@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.013.html

$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})$下界的估计的经典结果

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})。\tag{1}$$

2008 年黄荣在文献[3]中对上式进行改进，又给出如下结果

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant(1-\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}))\min_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii})。\tag{2}$$

2010 年刘庆兵又在文献[4]中改进文献[3]的结果，给出结果为

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1}{2}}\}。\tag{3}$$

本文将给出 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})$的一个更加精确且包含文献[4]中结果的新下界估计式，使该新下界的结果比文献[2-3]中的结果更加接近 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})$的真值。

2 主要结果

引理 1[5]　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0,b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$，其中 $m=1,2$。

引理 2[2]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是非奇异 M-矩阵，$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 是正的对角矩阵，则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\bigstar\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\bigstar(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\bigstar(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\bigstar(\boldsymbol{DBE})。$$

引理 3[7]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于复平面的下列区域

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\left(\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k\neq j}|a_{jk}|\right)\right\}。$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$，则

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_A^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_B^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\},\tag{4}$$

其中 $m=1,2$。

证明　显然 $n=1$，(4)式成立。下面假设 $n\geqslant 2$。

若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 不可约，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是不可约的 M-矩阵，$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)},\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}$ 也是不可约的非负矩阵，则存在正向量 $u^{(m)}=(u_1^m,u_2^m,\cdots,u_n^m)^{\mathrm{T}},v^{(m)}=(v_1^m,v_2^m,\cdots,v_n^m)^{\mathrm{T}}$ 分别是$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)},\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}$ 的右 Perron 特征向量。因为$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)}u^m=\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})u^m$，$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}v^m=\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)})v^m$，所以

$$\sum_{j\neq i}\frac{|a_{ij}|^m u_j^m}{u_i^m}=\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})a_{ii}^m,\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ij}|^m v_j^m}{v_i^m}=\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)})b_{ii}^m。$$

设 $\boldsymbol{U}=diag(u_1,u_2,\cdots,u_n),\boldsymbol{V}=diag(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，令

$$\hat{\boldsymbol{A}}=(\hat{a}_{ij})=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU}=\begin{pmatrix}a_{11}&\frac{a_{12}u_2}{u_1}&\cdots&\frac{a_{1n}u_n}{u_1}\\ \frac{a_{21}u_1}{u_2}&a_{22}&\cdots&\frac{a_{2n}u_n}{u_2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{a_{n1}u_1}{u_n}&\frac{a_{n2}u_2}{u_n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{B}}=(\hat{b}_{ij})=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{BV}=\begin{pmatrix}b_{11}&\frac{b_{12}v_2}{v_1}&\cdots&\frac{b_{1n}v_n}{v_1}\\ \frac{b_{21}v_1}{v_2}&b_{22}&\cdots&\frac{b_{2n}v_n}{v_2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{b_{n1}v_1}{v_n}&\frac{b_{n2}v_2}{v_n}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$\hat{\boldsymbol{A}}\bigstar\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&-\frac{a_{12}b_{12}u_2v_2}{u_1v_1}&\cdots&-\frac{a_{1n}b_{1n}u_nv_n}{u_1v_1}\\ -\frac{a_{21}b_{21}u_1v_1}{u_2v_2}&a_{22}b_{22}&\cdots&-\frac{a_{2n}b_{2n}u_nv_n}{u_2v_2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ -\frac{a_{n1}b_{n1}u_1v_1}{u_nv_n}&-\frac{a_{n2}b_{n2}u_2v_2}{u_nv_n}&\cdots&a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}。$$

由引理 2 可知$(\boldsymbol{VU})^{-1}(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})(\boldsymbol{VU})=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\boldsymbol{VU}=(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU})\bigstar(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{BV})=\hat{\boldsymbol{A}}\bigstar\hat{\boldsymbol{B}}$,所以 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})=\tau(\hat{\boldsymbol{A}}\bigstar\hat{\boldsymbol{B}})$。

设 $\tau(\overline{\boldsymbol{A}}\bigstar\overline{\boldsymbol{B}})=\lambda$,则对 $\forall\, i\in\mathbf{N},0<\lambda<a_{ii}b_{ii}$,由引理 3 知,存在$(i,j),i\neq j$,使得

$$|\lambda-a_{ii}b_{ii}||\lambda-a_{jj}b_{jj}|\leqslant\left(\sum_{k\neq i}\frac{|a_{ik}b_{ik}|u_kv_k}{u_iv_i}\right)\left(\sum_{k\neq j}\frac{|a_{jk}b_{jk}|u_kv_k}{u_jv_j}\right)\leqslant\left(\sum_{k\neq i}\frac{|a_{ik}|^mu_k^m}{u_i^m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ik}|^mv_k^m}{v_i^m}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot$$
$$\left(\sum_{k\neq j}\frac{|a_{jk}|^mu_k^m}{u_j^m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\sum_{k\neq j}\frac{|b_{jk}|^mv_k^m}{v_j^m}\right)^{\frac{1}{m}}=(\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})a_{ii}^m)^{\frac{1}{m}}(\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)})b_{ii}^m)^{\frac{1}{m}}\cdot(\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})a_{jj}^m)^{\frac{1}{m}}(\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)})b_{jj}^m)^{\frac{1}{m}}=$$
$$a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}))^{\frac{1}{m}},\tag{5}$$

由(5)式得

$$\lambda\geqslant\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(J_A^{(m)})\rho^2(J_B^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}。$$

所以

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$
$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}。$$

若 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 为可约矩阵,由文献[8]可知,$\boldsymbol{Z}_n$ 中的矩阵是非奇异 M-矩阵的充分必要条件是其所有顺序主子式为正。定义 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$为 n 阶置换阵,其中 $t_{12}=t_{23}=\cdots=t_{n-1,n}=t_{n,1}=1$,其余元素 $t_{ij}=0$。对任意 $\varepsilon>0$,当 ε 充分小时,可知 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 的所有顺序主子式都为正,所以 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 是非奇异 M-矩阵。然后用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 代替 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,且令 $\varepsilon\to0$,则由连续性知(4)式成立。 证毕

在(4)式中令 $m=1$,有

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1}{2}}\},$$

该估计式就是文献[4]中的结果。

3 数值算例

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-0.5&0&0\\-0.5&1&-0.5&0\\0&-0.5&1&-0.5\\0&0&-0.5&1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_4,\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})=0.765\,2,\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}})=0.809,\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(2)})=0.228\,7,\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(2)})=0.404\,5,\tau(\boldsymbol{B})=0.191,\tau(\boldsymbol{A})=1,\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})=3.229\,6$。

依据(1)式得 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})=0.191$;依据(2)式得

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant(1-\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}))\min_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii})=1.523\,8;$$

依据(3)式得

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1}{2}}\}=1.523\,8。$$

在本文定理 1 中令 $m=2$ 得

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}=2.783\,4。$$

注 数值算例表明定理 1 的结果改进了文献[2-4]的结果。

参考文献：

[1] 陈景良，陈向辉. 特殊矩阵[M]. 北京：清华大学出版社，2000.
Chen J L, Chen X H. Special matrices[M]. Beijing: Qing Hua University Press, 2000.

[2] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[3] Huang R. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428(7): 1551-1559.

[4] Liu Q B, Chen G L, Zhao L L. Some new bounds on the spectral radius of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(4): 936-948.

[5] 杜琨. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积特征值的界[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2008，2008(5)：45-50.
Du K. Bounds for eigenvalues of Hadamard product and Fan product of matrices[J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 2008, 2008(5): 45-50.

[6] 李艳艳，李耀堂. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计[J]. 云南大学学报：自然科学版，2010，32(2)：125-129.
Li Y Y, Li Y T. Bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Journal of Yun Nan University: Natural Science, 2010, 32 (2): 125-129.

[7] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[8] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

Lower Bound on Eigenvalue of the Fan Product of M-matrices

CHEN Fubin

(Department of Engineering, Oxbridge College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650106, China)

Abstract: A new lower bound on the minimum eigenvalue for the Fan product of two nonsingular M-matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ is given by using Brauer oval theorem and Cauchy-Schwitz inequality $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}(\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}^{(m)})\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}^{(m)}))^{\frac{1}{m}}]^{\frac{1}{2}}\}$. The estimating formulas of the bound is better than several known estimating formulas. By calculating with numerical example, we have $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant 2.7834$, compared the new bound with the classical results in the literature, numerical example shows that the new estimating formula improves the result of Horn and Johnson effectively, and also improves the other related results, which approach the real value of $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})$ than existing ones in some cases.

Key words: M-matrix; Fan product; eigenvalue; lower bound

（责任编辑　方　兴）