DOI:10.11721/cqnuj20150120

关于丢番图方程组 $x-1=3pqu^2, x^2+x+1=3v^2$ 的整数解*

杜先存[1]，管训贵[2]，万　飞[1]
(1. 红河学院 教师教育学院，云南 蒙自 661199；2. 泰州学院 数理信息学院，江苏 泰州 225300)

摘要：设 p,q 是互异的奇素数，$p\equiv q\equiv 1 \pmod 6$，本文主要利用递归序列、Pell 方程的解的性质、Maple 小程序等证明了丢番图方程组 $x-1=3pqu^2, x^2+x+1=3v^2$ 除开 $p=7, q=181$ 有非平凡解 $(x,u,v)=(60\ 817, \pm 4, \pm 35\ 113)$ 外，仅有平凡解 $(x,u,v)=(1,0,\pm 1)$。

关键词：丢番图方程；Pell 方程；整数解；递归序列

中图分类号：O156　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)01-0102-04

三次丢番图方程 $x^3-1=Dy^2$（$D>0$，且 D 无平方因子）是一类重要的方程，在研究方程 $x^3-1=Dy^2$ 时，方程组 $x-1=3Du^2, x^2+x+1=3v^2$ 起着非常重要的作用。关于丢番图方程组

$$x-1=3Du^2, x^2+x+1=3v^2 \tag{1}$$

的整数解，目前已有一些结果。1981 年，文献[1]用 Pell 方程法证明了当 $D>2$，D 无平方因子且不能被 3 或 $6k+1$ 形素数整除时，方程组(1)无正整数解；文献[2]用唯一分解定理证明了当 $D>1$，D 无平方因子且不能被 $6k+1$ 形素数整除时，方程(1)除 $D=2$ 仅有解 $x=23$ 外，均无其他正整数解。而当 $D>1$，D 无平方因子且能被 $6k+1$ 形素数整除时，情况比较复杂。对于具体的 D，文献[3-7]已有一些零散的结论。本文用递归序列、Pell 方程的解的性质、Maple 小程序，得出当 D 含两个互异的 $6k+1$ 形素因子时方程(1)的解的情况。

1 主要引理

引理 1[8]　设 p 是一个奇素数，则丢番图方程 $4x^4-py^2=1$ 除开 $p=3, x=y=1$ 和 $p=7, x=2, y=3$ 外，无其他的正整数解。

引理 2[8]　方程 $x^2-3y^4=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 2,\pm 1),(\pm 7,\pm 2),(\pm 1,0)$。

引理 3[8]　设 p 是一个奇素数，则丢番图方程 $x^4-py^2=1$ 除开 $p=5, x=3, y=4$ 和 $p=29, x=99, y=1\ 820$ 外，无其他的正整数解。

2 定理及证明

定理 1　设 p,q 为互异的奇素数，$p\equiv q\equiv 1 \pmod 6$，则丢番图方程组

$$x-1=3pqu^2, x^2+x+1=3v^2, gcd(u,v)=1 \tag{2}$$

在下述任一条件下只有当 $p=7, q=181$ 时的方程除平凡解 $(x,u,v)=(1,0,\pm 1)$ 外还有非平凡解 $(x,u,v)=(60\ 817,\pm 4,\pm 35\ 113)$，其他情形方程组只有平凡解 $(x,u,v)=(1,0,\pm 1)$：

1) $p\equiv 1 \pmod{24}, q\equiv 1 \pmod{12}$；
2) $p\equiv 13 \pmod{24}, q\equiv 13 \pmod{24}$；
3) $p\equiv 19 \pmod{24}, q\equiv 19 \pmod{24}$；
4) $p\equiv 7 \pmod{24}, q\equiv 7 \pmod{12}$；

* **收稿日期**：2013-09-21　**修回日期**：2013-10-10　**网络出版时间**：2015-1-7 16:04
资助项目：云南省教育厅科研基金(No. 2014Y462)；江苏省教育科学“十二五”规划课题项目(No. D201301083)；喀什师范学院校级重点课题(No. 2507)
作者简介：杜先存，女，讲师，研究方向为初等数论，E-mail: liye686868@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.020.html

5）$p\equiv 19\pmod{24}$，$q\equiv 1\pmod{12}$；

6）$p\equiv 7\pmod{24}$，$q\equiv 1\pmod{12}$。

证明　将 $x-1=3pqu^2$ 代入 $x^2+x+1=3v^2$ 得 $(2v)^2-3(2pqu^2+1)^2=1$，故有

$$2v+(2pqu^2+1)\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n,n\in\mathbf{Z}$$

这里 $2+\sqrt{3}$ 是 Pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解，因此有

$$2pqu^2+1=\pm y_n(n\in\mathbf{Z})，即$$

$$2pqu^2=\pm y_n-1。$$

又 $y_{-n}=-y_n$，所以只需考虑：

$$2pqu^2=y_n-1 \tag{3}$$

容易验证下列两式成立：

$$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n,x_0=1,x_1=2 \tag{4}$$

$$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n,y_0=0,y_1=1 \tag{5}$$

若 $n\equiv 0\pmod 2$，则 $y_n\equiv 0\pmod 2$，此时(3)式不成立，则 $n\equiv 1,3\pmod 4$。

当 $n\equiv 1\pmod 4$ 时，令 $n=4m+1(m\in\mathbf{Z})$，则

$$2pqu^2=y_{4m+1}-1=x_{4m}+2y_{4m}-1=$$

$$x_{2m}^2+3y_{2m}^2+4x_{2m}y_{2m}-1=2y_{2m}(2x_{2m}+3y_{2m})=2y_{2m}x_{2m+1},$$

即

$$pqu^2=x_{2m+1}y_{2m}。$$

又因为 $gcd(x_{2m+1},y_{2m})=gcd(2x_{2m}+3y_{2m},y_{2m})=gcd(2x_{2m},y_{2m})=gcd(2,y_{2m})=2$，所以下列情形之一成立：

$$x_{2m+1}=2a^2,y_{2m}=2pqb^2,u=2ab,gcd(a,b)=1, \tag{6}$$

$$x_{2m+1}=2pqa^2,y_{2m}=2b^2,u=2ab,gcd(a,b)=1, \tag{7}$$

$$x_{2m+1}=2qa^2,y_{2m}=2pb^2,u=2ab,gcd(a,b)=1, \tag{8}$$

$$x_{2m+1}=2pa^2,y_{2m}=2qb^2,u=2ab,gcd(a,b)=1。 \tag{9}$$

将(6)式的 $x_{2m+1}=2a^2$ 代入 $x_{2m+1}^2-3y_{2m+1}^2=1$，得 $4a^4-3y_{2m+1}^2=1$。根据引理 1 知，$a^2=1$，此时 $x_{2m+1}=2$，由(4)式得 $m=0$，于是给出方程(2)的平凡解 $(x,u,v)=(1,0,\pm 1)$。

由(7)式的 $y_{2m}=2b^2$ 得 $x_my_m=b^2$，又 $gcd(x_m,y_m)=1$，则有

$$x_m=c^2,y_m=d^2。$$

故 $(c^2)^2-3d^4=1$，根据引理 2 知，$c^2=1$，此时 $x_m=1$，则 $m=0$。

又 p,q 为奇素数，而由(4)式知，$x_1=2$，故 $x_1\neq 2pqa^2$，所以该情形方程(2)无整数解。

由(8)式的 $y_{2m}=2pb^2$ 得 $x_my_m=pb^2$，又 $gcd(x_m,y_m)=1$，则有以下情形之一成立：

$$x_m=c^2,y_m=pd^2,b=cd,gcd(c,d)=1, \tag{10}$$

$$x_m=pc^2,y_m=d^2,b=cd,gcd(c,d)=1。 \tag{11}$$

若(10)式成立，则有

$$c^4-3(pd^2)^2=1。 \tag{12}$$

由引理 3 知，方程(12)仅有整数解 $(c,d)=(\pm 1,0)$，此时 $y_{2m}=0$，则 $m=0$。

又 q 为奇素数，而由(4)式知，$x_1=2$，故 $x_1\neq 2qa^2$，所以(8)式的 $x_{2m+1}=2qa^2$ 不成立，故方程(8)无解，所以该情形方程(2)无整数解。

若(11)式成立，则有

$$(pc^2)^2-3d^4=1。 \tag{13}$$

由引理 2 知，方程(13)仅有整数解 $(p,c,d)=(1,\pm 1,0)$，$(7,\pm 1,\pm 2)$ 和 $(2,\pm 1,\pm 1)$，当 $p\equiv 1,13,19\pmod{24}$ 为奇素数时，(13)式显然无解；当 $p\equiv 7\pmod{24}$ 为奇素数时，有

$$(p,c,d)=(7,\pm 1,\pm 2),$$

从而 $p=7$，$x_m=7$，则 $m=2$。由(5)式得 $x_5=362$，此时由(8)式的 $x_{2m+1}=2qa^2$ 得

$$q=181,a=\pm 1。$$

故 $u=2ab=\pm 4$,此时 $x=3pqu^2+1=60\ 817$,又由 $x^2+x+1=3v^2$ 得 $v=35\ 113$,故该情形方程(3)有整数解 $(x,u,v)=(60\ 817,\pm 4,\pm 35\ 113)$。

由(9)式的 $y_{2m}=2qb^2$ 得

$$x_m y_m=qb^2。$$

仿(8)式的讨论知,$q=7$,$p=181$,此时方程(3)仍有整数解 $(x,u,v)=(60\ 817,\pm 4,\pm 35\ 113)$。

当 $n\equiv 3(\bmod 4)$,则 $y_n\equiv 7(\bmod 8)$,又在题设条件1)、2)、3)、4)下,$2pq\equiv 2(\bmod 8)$,故由(3)式知 $2u^2\equiv 6(\bmod 8)$,即 $u^2\equiv 3(\bmod 4)$,这是不可能的;在题设条件5)、6)下,令 $n=4m+3(m\in\mathbf{Z})$,则

$$2pqu^2=y_{4m+3}-1=x_{4m+2}+2y_{4m+2}-1=x_{2m+1}^2+3y_{2m+1}^2+$$

$$4x_{2m+1}y_{2m+1}-1=2y_{2m+1}(2x_{2m+1}+3y_{2m+1})=2y_{2m+1}x_{2m+2},$$

即

$$pqu^2=x_{2m+2}y_{2m+1}。$$

又因为 $gcd(x_{2m+2},y_{2m+1})=gcd(2x_{2m+1}+3y_{2m+1},y_{2m+1})=gcd(2x_{2m+1},y_{2m+1})=1$,所以下列情形之一成立:

$$x_{2m+2}=pqa^2,y_{2m+1}=b^2,u=ab,gcd(a,b)=1,\tag{14}$$

$$x_{2m+2}=a^2,y_{2m+1}=pqb^2,u=ab,gcd(a,b)=1,\tag{15}$$

$$x_{2m+2}=pa^2,y_{2m+1}=qb^2,u=ab,gcd(a,b)=1,\tag{16}$$

$$x_{2m+2}=qa^2,y_{2m+1}=pb^2,u=ab,gcd(a,b)=1。\tag{17}$$

将(14)式的 $y_{2m+1}=b^2$ 代入 $x_{2m+1}^2-3y_{2m+1}^2=1$,得

$$x_{2m+1}^2-3b^4=1。$$

根据引理2知,$b^2=0,1,4$,即 $y_{2m+1}=0,1,4$,仅有 $y_{2m+1}=1$ 成立,此时 $m=0$。但由(4)式知,$x_2=7$,故 $x_2\neq pqa^2$,所以该情形方程(2)无整数解。

将(15)式的 $x_{2m+2}=a^2$ 代入 $x_{2m+2}^2-3y_{2m+2}^2=1$,得

$$a^4-3y_{2m+2}^2=1。$$

根据引理3知 $a^2=1$,即 $x_{2m+2}=1$,则 $m=-1$,但由(5)式知,$y_{-1}=-y_1=-1$,故 $y_{-1}\neq pqb^2$,所以该情形方程(2)无整数解。

将(16)式代入 $x_{2m+2}=2x_{2m+1}+3y_{2m+1}$ 得

$$pa^2=2x_{2m+1}+3qb^2,$$

即

$$2x_{2m+1}=pa^2-3qb^2。\tag{18}$$

因 $x_{2m+2}\equiv 1(\bmod 2)$,$p$ 为奇素数,故由(16)式的 $x_{2m+2}=pa^2$ 知 a 为奇数,则

$$a^2\equiv 1(\bmod 8),$$

而 $y_{2m+1}\equiv 1(\bmod 2)$,$q$ 为奇素数,故由(16)式的 $y_{2m+1}=qb^2$ 知 b 为奇数,则

$$b^2\equiv 1(\bmod 8)。$$

又 $x_{2m+1}\equiv 2(\bmod 8)$,故(18)式两边取模8,得

$$4\equiv p-3q(\bmod 8)。\tag{19}$$

又当 $q\equiv 1(\bmod 24)$,$p\equiv 19(\bmod 24)$ 或 $q\equiv 13(\bmod 24)$,$p\equiv 7(\bmod 24)$ 时,$p-3q\equiv 0(\bmod 8)$,此时(21)式不成立,故条件5)、6)不成立。

将(18)式代入 $y_{2m+1}=-x_{2m+2}+2y_{2m+2}$ 得

$$qb^2=-pa^2+2y_{2m+2},$$

即

$$2y_{2m+2}=qb^2+pa^2。\tag{20}$$

由(16)式知 $a^2\equiv 1(\bmod 8)$,$b^2\equiv 1(\bmod 8)$。又因 $y_{2m+2}\equiv 1,7(\bmod 8)$,故 $2y_{2m+2}\equiv 2,6(\bmod 8)$,对(20)式两边取模8,得

$$2,6\equiv q+p(\bmod 8)。\tag{21}$$

又当 $q\equiv 13(\bmod 24)$,$p\equiv 19(\bmod 24)$ 或 $q\equiv 1(\bmod 24)$,$p\equiv 7(\bmod 24)$ 时,$q+p\equiv 0(\bmod 8)$,此时(21)式不成立,故条件5)、6)不成立。

综上有,该情形下方程(2)无整数解。仿(16)式的讨论知(17)式不成立,故方程(2)无整数解。

综上所述定理成立。　证毕

参考文献：

[1] 柯召,孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm1=Dy^2$[J]. 中国科学，1981,12:1453-1457.
Ke Z, Sun Q. On the Diophantine equation $x^3\pm1=Dy^2$[J]. Scientia Sinica Mathemation, 1981, 12:1453-1457.

[2] 曹珍富,刘培杰. 一个 Diophantine 方程的初等解法[J]. 山东师范大学学报:自然科学版,1989,1:13-16.
Cao Z F, Liu P J. A solution of the Diophantine equations [J]. Journal of Shandong Normal University: Natural Science, 1989, 1:13-16.

[3] 韩云娜. 关于 Diophantine 方程 $x^3-1=38y^2$[J]. 科学技术与工程,2010,10(1):169-171.
Han Y N. On the Diophantine equation $x^3-1=38y^2$[J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(1):169-171.

[4] 罗明,黄勇庆. 关于不定方程 $x^3-1=26y^2$[J]. 西南大学学报:自然科学版,2007,29(6):5-7.
Luo M, Huang Y Q. On the Diophantine equation $x^3-1=26y^2$[J]. Journal of Southwest University: Natural Science, 2007, 29(6):5-7.

[5] 牟全武,吴强. 关于不定方程 $x^3-1=103y^2$[J]. 西南大学学报:自然科学版,2008,30(10):38-40.
Mou Q W, Wu Q. On the Diophantine equation $x^3-1=103y^2$[J]. Journal of Southwest University: Natural Science, 2008, 30(10):38-40.

[6] 李鑫,梁艳华. 关于不定方程 $x^3-1=111y^2$[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2009,34(1):12-15.
Li X, Lian Y H. On the Diophantine equation $x^3-1=111y^2$[J]. Journal of Southwest Normal University: Natural Science, 2009, 34(1):12-15.

[7] 杜先存,万飞,杨慧章. 关于丢番图方程 $x^3\pm1=1\,267y^2$ 的整数解[J]. 数学的实践与认识,2013,43(15):288-292.
Du X C, Wan F, Yang H Z. On the Diophantine equation $x^3\pm1=1\,267y^2$[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(15):288-292.

[8] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989:20,260,69.
Cao Z F. Introduction to Diophantine equations[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989.

On the System of Diophantine Equations $x-1=3pqu^2$ and $x^2+x+1=3v^2$

DU Xiancun[1], GUAN Xungui[2], WAN Fei[1]

(1. Teachers' Educational College, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199;

2. School of Mathematics, Physics & Information Science, Taizhou Normal College, Taizhou Jiangsu 225300, China)

Abstract: Let p,q be different odd primes, $p\equiv q\equiv1 \pmod 6$. By using recurrent sequence, some properties of the solutionsto Pell equation and Maple formality to prove the system Diophantine equations $x-1=3pqu^2$, $x^2+x+1=3v^2$ has only trivial solutions $(x,u,v)=(1,0,\pm1)$ with the exception $p=7, q=181$ in which the system Diophantine equations $x-1=3pqu^2$, $x^2+x+1=3v^2$ have nontrivial solutions $(x,u,v)=(60\,817,\pm4,\pm35\,113)$.

Key words: Diophantine equation; Pell equation; integer solution; recurrent sequence

(责任编辑 游中胜)