DOI:10.11721/cqnuj20150212

# 二阶脉冲微分方程三点边值问题*

王岩岩[1]，崔艳艳[1]，刘　伟[1,2]，杜金姬[1]

(1. 周口师范学院 数学与统计学院，河南 周口 466001；
2. 华东师范大学 数学系 应用数学与交叉学科研究中心，上海 200241)

**摘要**：研究了一类具有边值条件 $u(0)=0, u(1)-\alpha u(\eta)=b$ 形如 $u''+a(t)f(u)=0, -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k))\ (k=1,2,\cdots,m)$ 的二阶脉冲微分方程三点边值问题解的存在性。在合适的假设条件下，利用 Schauder 不动点定理讨论了该脉冲微分方程解的存在性，并在此基础上通过相关引理给出了方程至少存在一个正解和无解的充分条件，即存在 $\varepsilon^*>0$，使得当 $0<b<\varepsilon^*$ 时，所考虑的脉冲微分方程边值问题至少存在一个正解；另外，当 $b>\varepsilon^*$ 时，边值问题无解。

**关键词**：正解；边值问题；脉冲；不动点定理；存在性

**中图分类号**：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)02-0064-04

脉冲系统作为现代科学领域中广泛存在的一类系统，它是描述刻画电力系统、核反应堆、飞机和火箭等这些模型的有力工具。由于脉冲微分系统能充分体现瞬时突变现象对系统状态的影响，并能精确反映事物的规律，因此对脉冲微分方程的研究已引起了国内外同行的广泛关注，并取得了一定进展[1-7]，其理论成果在很多领域都得到了广泛的应用[8-11]。然而由于脉冲微分系统的复杂性和多样性，目前这方面研究的成果还比较少。文献[6]利用单调迭代的方法，讨论了一类脉冲微分方程边值问题解的存在性。文献[7]利用不动点和压缩映射原理，对脉冲微分方程边值问题解的存在性进行了讨论，并给出了解存在的充分条件。

基于上述情况，本文讨论如下二阶脉冲微分方程的三点边值问题解的存在性

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0, t\in J', \\ -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k)), k=1,2,\cdots,m, \\ u(0)=0, u(1)-\alpha u(\eta)=b。\end{cases} \tag{1}$$

其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$J=[0,1]$，$J'=J/\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，$0<t_1<t_2<\cdots<t_m<1$，$I_k\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$，$b,\alpha>0$，$\eta\in(0,1)$，$\alpha\eta<1$，$\Delta u'(t_k)=u'(t_k^+)-u'(t_k)$，$PC(J)=PC(J,\mathbf{R})=\{u: J\to\mathbf{R}, u$ 当 $t\neq t_k$ 时连续，$u(t_i^+)$ 和 $u(t_i^-)$ 均存在，且 $u$ 在 $t_i$ 处左连续$\}$。

## 1 预备知识

本文目的是建立边值问题(1)正解存在的充分条件，为此首先对边值问题(1)做出假设：1) $\dfrac{f(u)}{u}+M\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{I_k(u(t_k))}{u(t_k)}\leqslant\beta$，其中 $\beta>0$ 是常数；2) $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$；3) $a(t)\in C([0,1],[0,+\infty))$，且 $a(t)$ 在$[\eta,1]$的任何子区间上均不恒为零。

根据需要，本节给出如下引理。

**引理 1**[8]　令 $\alpha\eta\neq1$，则对于 $y\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases} u''+y(t)=0, \\ u(0)=0, u(1)-\alpha u(\eta)=0, \end{cases} \tag{2}$$

* **收稿日期**：2013-04-25　**修回日期**：2014-12-26　**网络出版时间**：2015-01-22 11:30

**资助项目**：国家自然科学基金项目(No. 11171113)；周口师范学院青年基金重点项目(No. zknuc0201)；河南省软科学研究项目(No. 142400411358)

**作者简介**：王岩岩，女，讲师，研究方向为常微分方程边值问题，E-mail：yywang918@163.com

**网络出版地址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.004.html

有唯一解 $u(t)=-\int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{at}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{t(1-s-\alpha\eta+\alpha s)}{1-\alpha\eta},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant s\leqslant\eta\leqslant 1\\ \frac{t(1-s)}{1-\alpha\eta},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant\eta\leqslant s\leqslant 1\\ \frac{s(1-t-\alpha\eta+\alpha t)}{1-\alpha\eta},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant s\leqslant\eta\leqslant 1\\ \frac{s+\alpha\eta t-ts-\alpha\eta s}{1-\alpha\eta},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant\eta\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

。当 $0<\alpha\eta<1$ 时，可得 $G(t,s)$ 满足 $0\leqslant G(t,s)<+\infty$，$\forall t$，$s\in[0,1]$。

记 $M=\max\limits_{t,s\in[0,1]}G(t,s)$，根据引理 1 可得如下结论。

**引理 2**　令 $\alpha\eta\neq 1$，则对于 $y\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases}u''+y(t)=0,t\in J',\\ -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k)),k=1,2,\cdots,m,\\ u(0)=0,u(1)-\alpha u(\eta)=0,\end{cases}\tag{3}$$

有唯一解 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{0<t_k<t}G(t,t_k)I_k(u(t_k))$，其中 $G(t,s)$ 如引理 1 所描述。

**引理 3**[8]　令 $0<\alpha<\frac{1}{\eta}$，若 $y\in C[0,1]$ 且 $y\geqslant 0$，则边值问题(2)有唯一解 $u$，并满足条件 $u\geqslant 0$，$t\in[0,1]$。根据上述引理，由 $I_k\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ 以及 $G(t,s)$ 非负可知，边值问题(3)有唯一解 $u$ 且满足 $u\geqslant 0$。

**引理 4**[8]　令 $0<\alpha<\frac{1}{\eta}$，若 $y\in C[0,1]$ 及 $y\geqslant 0$，则边值问题(2)有唯一解 $u$，且满足 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\gamma\|u\|$，其中 $\gamma=\min\left\{\alpha\eta,\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta},\eta\right\}$，$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$。

本文将始终假设 $f(u)=f(0)$，$u\leqslant 0$。

## 2 主要结论

**定理 1**　如果假设 1)～3)成立，则存在 $\varepsilon^*>0$，使得当 $0<b<\varepsilon^*$ 时，边值问题 (1) 至少存在一个正解；当 $b>\varepsilon^*$ 时，边值问题(1)无解。

**证明**　证明过程分 3 步：1) 当 $b>0$ 充分小，证明边值问题(1)有正解；2) 当 $b>0$ 充分大，证明边值问题(1)没有正解；3) 对任意 $b\in[0,\varepsilon^*)$，证明边值问题(1)都有正解。

1) 考虑如下问题

$$\begin{cases}\varphi''=0,t\in J',\\ -\Delta\varphi'(t_k)=I_k(\varphi(t_k)),k=1,2,\cdots,m,\\ \varphi(0)=0,\varphi(1)-\alpha\varphi(\eta)=1,\end{cases}\tag{4}$$

可解得 $\varphi=\frac{t}{1-\alpha\eta}$，则 $u$ 为边值问题(1)的正解的充分必要条件是 $v=u-b\varphi$ 为边值问题

$$\begin{cases}v''+a(t)f(v+b\varphi)=0,t\in J',\\ -\Delta v'(t_k)=I_k(u(t_k)),\\ v(0)=0,v(1)-\alpha v(\eta)=0,\end{cases}$$

的正解。

令 $\tilde{f}(x)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant x}f(s)$，由于 $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\tilde{f}(u)}{u}=0$，则存在正数 $b_1<\beta$，满足

$$\tilde{f}(b_1+b_1\|\varphi\|)\|p\|\leqslant b_1<\beta,\tag{5}$$

其中 $p$ 为方程 $\begin{cases}p''+1=0,t\in J'\\ -\Delta p'(t_k)=I_k(p(t_k)),k=1,2,\cdots,m\\ p(0)=0,p(1)-\alpha p(\eta)=0\end{cases}$ 的解，并且 $p(t)=\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{0<t_k<t}G(t,t_k)I_k(p(t_k))$。根

据引理 3 可知,$p(t)\geqslant 0,t\in J$。由假设 1)知,对于(5)式中的 $b_1<\beta$ 有 $f(u)\leqslant\beta u$,$M\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{I_k(u(t_k))}{u(t_k)}\leqslant b_1-\beta$。

定义闭凸子集 $D=\{w\in C[0,1]\mid 0\leqslant w(t)\leqslant\beta,\ t\in J\}$,对任意 $w\in D$,令 $v=A(w)$ 是边值问题 $\begin{cases}v''+a(t)f(v+b\varphi)=0,t\in J'\\ -\Delta v'(t_k)=I_k(u(t_k))\\ v(0)=0,v(1)-\alpha v(\eta)=0\end{cases}$ 的解,则 $A:D\to C[0,1]$全连续。假设 $b<\beta$,可得 $A:D\to D$。事实上,根据引理 3,有

$$0\leqslant v(t)=\int_0^1 G(t,s)f(w(s)+b\varphi(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}G(t,t_k)I_k(w(t_k)+b\varphi(t_k))\leqslant$$

$$\widetilde{f}(b_1+b_1\|\varphi_0\|)\|p_0\|+M\sum_{k=1}^{m}I_k(w(t_k)+b\varphi(t_k))\leqslant b_1+\beta-b_1=\beta$$

即 $v\in D$。根据 Schauder 不动点定理,可知 $A$ 在 $D$ 中有不动点 $v$,因此 $u=v+b\varphi$ 是边值问题(1)的正解。

2) 采用反证法,若 $b>0$ 无界,而边值问题(1)有正解,则 $v=u-b\varphi$ 满足(4)式,且存在 $\delta:0<\delta<1$,有 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}(v+b\varphi)\geqslant\|v+b\varphi\|\delta$。根据 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1-\alpha\eta}$,可知 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}h(t)\geqslant\eta\|\varphi\|$。令 $\delta=\min\{\gamma,\eta\}$,通过引理 4,可得 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}(v(t)+b\varphi(t))\geqslant\delta(\|v\|+\varphi\|h\|)\geqslant\delta\|v+b\varphi\|$。

令 $\overline{f}(t)=\inf\limits_{t\leqslant s}f(s)$,有

$$v(\eta)=\int_0^1 G(\eta,s)f(v(s)+b\varphi(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{m}G(\eta,t_k)(v+b\varphi)(t_k)\geqslant\int_0^1 G(\eta,s)f(v(s)+b\varphi(s))\mathrm{d}s=$$

$$-\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\,\overline{f}(\delta\|v+b\varphi\|)。$$

进一步,有 $\dfrac{\overline{f}(\delta\|v+b\varphi\|)}{\|v+b\varphi\|}\leqslant\dfrac{\overline{f}(\delta\|v+b\varphi\|)}{\|v\|}\leqslant\left[\dfrac{\eta}{1-\alpha\eta}\displaystyle\int_\eta^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}$。

根据假设 2)及 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{f}(t)}{t}=\infty$,存在一个正实数 $M$ 使得 $\|v+b\varphi\|\leqslant M$。通过 $v\geqslant 0,b>0$ 及 $\varphi$ 的定义,可得 $b$ 有界,矛盾。

3) 令 $\Gamma=\{b\mid$边值问题(1)有正解$\}$,$\varepsilon^*=\sup\Gamma$,则有 $0<\varepsilon^*<\infty$。下证对任意 $b\in[0,\varepsilon^*)$,边值问题(1)都有正解。

对任意 $b\in[0,\varepsilon^*)$,根据上确界的定义,可知存在 $\widetilde{b}>b,\widetilde{b}\in\Gamma$,使得边值问题(1)有正解 $u_{\widetilde{b}}$。

考虑如下边值问题

$$\begin{cases}u''+a(t)F^*(u(t))=0,t\in J',\\ -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k)),k=1,2,\cdots,m,\\ u(0)=0,u(1)-\alpha u(\eta)=b。\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$F^*(u(t))=\begin{cases}f(u_{\widetilde{b}}(t)),u_b(t)>u_{\widetilde{b}}(t),\\ f(u(t)),0\leqslant u_b(t)\leqslant u_{\widetilde{b}}(t),\\ f(0),u_b(t)<0。\end{cases}\tag{7}$$

由于 $F^*(u(t))$连续且有界,根据引理 3 知 $u_b\geqslant 0$。

令 $\Omega_0=\{t\in J\mid u_b(t)>u_{\widetilde{b}}(t)\}$。若 $\Omega_0\neq\varnothing$,分如下情况进行讨论:若 $u_b(1)\leqslant u_{\widetilde{b}}(1)$,则存在$(a_1,b_1)\subset\Omega_0$ 使得 $w(a_1)=w(a_2)=0$,其中 $w(t)=u_b(t)-u_{\widetilde{b}}(t)$。并且 $w''(t)=0,t\in(a_1,a_2)$,则有 $w(t)=0,t\in(a_1,a_2)$,此与假设矛盾。

若 $u_b(1)>u_{\widetilde{b}}(1)$,可得 $w(\eta)>0$。根据 $w(1)-\alpha w(\eta)=b-\widetilde{b}<0,w(1)>0$,可得 $w(\eta)>0$。

i) 若在$(0,1)$上,$w(t)\geqslant 0$。此时 $w''(t)=0,w'(0)=0,w(1)-\alpha w(\eta)=b-\widetilde{b}<0$。根据引理 3,可得 $w<0$,此与 $\Lambda_0\neq\varnothing$矛盾。

ii) 若存在 $\xi\in[\theta,\eta)$,使得 $w(\xi)=0$,且 $w(t)>0,t\in(\xi,1)$。类似于 i)的方法可得到矛盾。

iii) 若 $w(\eta)>0$,可知存在 $\zeta\in(\eta,\tau)$使得 $w(\zeta)=0$。从而,进一步推出$(c,d)\subset(0,\zeta)$使得 $w(c)=w(d)=0$,

$w(t)>0, t\in(c,d)$。但由于 $w''(t)=0, t\in(c,d)$，可得 $w(t)=0, t\in(c,d)$，这与假设相矛盾，即证。　　证毕

**参考文献：**

[1] Franco D, Nieto J J. A new maximum principle for impulsive first-order problems[J]. International Journal of Theoretical physics, 1998, 37(5): 1607-1616.

[2] Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2000, 7(2): 265-287.

[3] Lenci S, Rega G. Periodic solutions and bifurcations in an impact inverted pendulum under impulsive excitation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2000, 11(15): 2453-2472.

[4] 汪娜，鲁世平，章家顺，等. 二阶时滞微分方程边值问题的正解存在性[J]. 安徽师范大学学报：自然科学版，2006, 29(6): 514-518.
Wang N, Lu S P, Zhang J S, et al. On the existence of positive solutions for BVP of second-order delay differential equations[J]. Journal of Anhui Normal University: Natural Science, 2006, 29(6): 514-518.

[5] 杨志春. Volterra 型脉冲积分微分方程解的存在性和稳定性[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2008, 25(1): 1-4.
Yang Z C. Existence and stability of solution for a class of impulsive Volterra integro-differential equations [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2008, 25(1): 1-4.

[6] 宋玉霞，闫宝强. 二阶脉冲微分方程三点边值问题解的存在性[J]. 系统科学与数学，2008, 28(2): 168-179.
Song Y X, Yan B Q. Existence of solutions of three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2008, 28(2): 168-179.

[7] 曹晓敏. 二阶脉冲微分方程三点边值问题解的存在性[J]. 数学的实践与认识，2004, 34(3): 148-153.
Cao X M. Existence of solutions of three-point boundary value problems for second-orderimpulsive differential equation[J]. Mathematics in Practice and theory, 2004, 34(3): 148-153.

[8] Ma R Y. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1998, 1998(34): 1-8.

[9] Ma R Y. Positive solution for second-order three-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14(1): 1-5.

[10] Chen L J, Sun J T. Boundary value problem of second order impulsive functional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(1): 708-720.

[11] Ding W, Han M A. Periodic boundary value problem for the second-order impulsive functional differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 50(3): 491-507.

## Three-point Boundary Value Problems for Second-order Impulsive Ordinary Differential Equations

WANG Yanyan[1], CUI Yanyan[1], LIU Wei[1,2], DU Jinji[1]

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 466001;
2. Centre for Applied and Interdisciplinary Mathematics,
Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract**: This paper investigates boundary value problems for a class of second-order three-point impulsive ordinary differential equations $u''+a(t)f(u)=0, -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k))(k=1,2,\cdots,m)$ with boundary value conditions $u(0)=0, u(1)-\alpha u(\eta)=b$. The existence of solutions is discussed by the Schauder's fixed point theorem. A sufficient condition on the existence of positive solutions is obtained through relevant lemmas under suitable assumption conditions, that is, there exists a scalar $\varepsilon^*>0$such that the considered impulsive ordinary differential equations boundary problem has at least one solution for $0<b<\varepsilon^*$ and no solution for $b>\varepsilon^*$, respectively. Some existing corresponding results are improved and extended.

**Key words**: positive solutions; boundary value problems; impulsive; fixed point theorem; existence

（责任编辑　黄　颖）