2015 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2015
第 32 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 32 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20150215

关于几个单群的刻画*

何立官，童 殷
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要：设 G 为有限群，$o_1(G)$表示 G 中最高阶元素的阶。用群的阶及最高阶元素的阶刻画了单群 $F_4(2)$，${}^2E_6(2)$和 $O_{10}^+(2)$。即证明了：设 G 为有限群，M 为单群：$F_4(2)$，${}^2E_6(2)$和 $O_{10}^+(2)$，则 $G\cong M$ 当且仅当$|G|=|M|$，且 $o_1(G)=o_1(M)$。

关键词：有限群；最高阶元素的阶；单群；刻画

中图分类号：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2015)02-0076-03

施武杰教授提出用“两个阶”刻画单群的著名猜想，即任何有限单群都可以由“群的阶”和“元素阶的集合”加以刻画。2009 年，在以施武杰教授和俄罗斯科学院院士 Mazurov V. D. 为主的中俄群论工作者共同努力下，该猜想得以完整证明[1-8]。当然，对于群的数量刻画，人们总是力图用最少的数量刻画群最多的性质。文献[9-17]成功地用群的阶和最高阶元素的阶(少数情形用到了次高阶元素的阶)刻画了单 K_3-群、散在单群、部分单 K_4-群、部分交错单群和部分李型单群。而本文继续这一工作，仅用最高阶元的阶和群的阶刻画了单群 $F_4(2)$，${}^2E_6(2)$和 $O_{10}^+(2)$。

本文所讨论的群均为有限群，群后括号里的数表示该群的阶，如 $G(2^2\cdot 3\cdot 5)$表示群 G 的阶为 $2^2\cdot 3\cdot 5$，而 $o_1(G)$表示群 G 中最高阶元素的阶。设 k 为一正整数，$\pi(k)$表示 k 的素因子之集，特别地 $\pi(G)=\pi(|G|)$，其余符号及术语是标准的。

1 主要引理

引理 1 设 k 为一正整数，$\pi(k)$表示 k 的素因子之集。如果 t 为正整数，且 $22\leqslant t\leqslant 47$，那么 $\pi(2^{2t}-1)\not\subset\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31\}$。

引理 2[18] 设 π'群 H 作用在 π 群 G 上，且 G 和 H 中至少有一个可解，则对任意素数 $p\,||G|$，G 中存在 H 不变的 p-sylow 子群，并且 G 的任意两个 H 不变 p-sylow 子群在 $C_G(H)$下共轭。

2 定理及其证明

定理 1 设 G 为有限群，M 为下列单群：$F_4(2)$，${}^2E_6(2)$，$O_{10}^+(2)$，则 $G\cong M$ 的充分必要条件是：i) $|G|=|M|$；ii) $o_1(G)=o_1(M)$。

证明 必要性显然，下证充分性。

情形 1，设 $M=F_4(2)$。此时$|G|=2^{22}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 17$，$o_1(G)=30$。易证 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得K/H为非交换单群，且$\{13,17\}\subseteq\pi(K/H)$。事实上，令 $1=G_k\lhd G_{k-1}\lhd\cdots\lhd G_1\lhd G_0=G$ 为 G 的一主群列，则存在正整数 i 使得$\{13,17\}\cap\pi(G_i)\neq\varnothing$，而$\{13,17\}\cap\pi(G_{i+1})=\varnothing$。取 $K=G_i$，$H=G_{i+1}$，则 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 为 G 的一正规列，而K/H为G/H的极小正规子群。断言$\{13,17\}\subseteq\pi(K)$。如果 $17\in\pi(K)$而 $13\notin\pi(K)$，那么 $13\in\pi(G/K)$。由Frattini 论断有 $G=N_G(S_{17})K$，其中 S_{17}为 K 的一个 17-Sylow 子群，于是 $13\in\pi(N_G(S_{17}))$。用 13

* **收稿日期**：2013-11-13 **修回日期**：2014-11-15 **网络出版时间**：2015-01-22 11:30
资助项目：国家自然科学基金(No. 11171364；No. 11271301)；重庆市自然科学基金 (No. CSTC2014jcyjA00004)；重庆教委科技项目(No. KJ1400520)；重庆师范大学科研基金(No. 14XYY026)
作者简介：何立官，男，副教授，博士，研究方向为有限群，E-mail：guanlihe@126.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.007.html

阶元作用在 S_{17} 上，该作用平凡，从而 G 中有 221 阶元，矛盾，故 $13\in\pi(K)$。

同理可以证明当 $13\in\pi(K)$ 时，有 $17\in\pi(K)$。于是 $\{13,17\}\subseteq\pi(K)$，即有 $\{13,17\}\subseteq\pi\left({K}/{H}\right)$。由于 ${K}/{H}$ 为同构单群的直积，故 ${K}/{H}$ 只能为非交换单群。而 $\left|{K}/{H}\right| \mid 2^{22}\cdot 3^{6}\cdot 5^{2}\cdot 7^{2}\cdot 13\cdot 17$，故由引理 1，文献[19]以及文献[11]中的表 2、表 3 知，${K}/{H}$ 同构于 $L_3(16)(2^{12}\cdot 3^{2}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 13\cdot 17)$ 或 $F_4(2)(2^{22}\cdot 3^{2}\cdot 5^{2}\cdot 7^{2}\cdot 13\cdot 17)$。设 ${K}/{H}$ 同构于 $L_3(16)$。考类 G 作用在 K/H 上，则 ${G}/{C_G(K/H)}$ 同构于 $Aut(K/H)$ 的一子群，从而有 $\left|{G}/{C_G(K/H)}\right| \mid |Aut(K/H)|$。因为 $|Aut(K/H)|=24\cdot|K/H|$，所以有 $7\in\pi(C_G(K/H))$。如果 7 是 $|H|$ 的因子，用 17 阶元共轭在 H 上，由引理 2 知存在 H 的一 Sylow 7-子群 S 在该作用下不变。显然 $|S| \mid 7^2$，17 不整除 $|Aut(S)|$，这说明 G 中有 119 阶元，矛盾。故 7 不是 $|H|$ 的因子，此时 ${G}/{H}$ 中也有 119 阶元，即 G 中有 119 阶元，矛盾。故 ${K}/{H}\cong F_4(2)$，此时 $K=G,H=1$，即 $G\cong F_4(2)$。

情形 2，设 $M={}^2E_6(2)$。此时 $|G|=2^{36}\cdot 3^{9}\cdot 5^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$，$o_1(G)=35$。类型情形 1 的讨论知 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得 ${K}/{H}$ 为非交换单群，且 $\{17,19\}\subseteq\pi\left({K}/{H}\right)$。因为 $|K/H| \mid 2^{36}\cdot 3^{9}\cdot 5^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$，故由引理 1，文献[19]以及文献[11]中的表 2、表 3 知，${K}/{H}$ 只能同构于 ${}^2E_6(2)$。于是 $K=G,H=1$，即 $G\cong{}^2E_6(2)$。

情形 3，设 $M=O_{10}^{+}(2)$。此时 $|G|=2^{20}\cdot 3^{5}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 17\cdot 31$，$o_1(G)=35$。类似情形 1 的讨论知 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得 ${K}/{H}$ 为非交换单群，且 $\{17,31\}\subseteq\pi\left({K}/{H}\right)$。因为 $|K/H| \mid 2^{20}\cdot 3^{5}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 17\cdot 31$，故由引理 1，文献[19]以及文献[11]中的表 2、表 3 知，${K}/{H}$ 只能同构于 $O_{10}^{+}(2)$。于是 $K=G,H=1$，即 $G\cong O_{10}^{+}(2)$。

证毕

注 不是每个单群都能通过群阶与最高阶元的阶唯一刻画。文献[20]证明了单群 $L_2(7)$ 是不能通过其阶和最高阶元素的阶唯一刻画的。

参考文献：

[1] Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups[C]//Group Theory－Porc Singapore Group Theory Conf. Berlin-New York：Walter de Gruyter，1989，531-540.

[2] Shi W J，Bi J X. A characterization of the alternating groups [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics，1992，16(1)：81-90.

[3] Shi W J，Bi J X. A characterization of Suzuki-Reegroups [J]. Science in China (Ser A)，1991，34(1)：14-19.

[4] Shi W J，Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group[J]. Lecture Notes in Math，1990，1456：171-180.

[5] Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups[J]. Progress in Nature Science，1994，4(3)：316-326.

[6] Cao H P，Shi W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J]. Science in China (Ser A)，2002，45：761-772.

[7] Xu M C，Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J]. Algebra Colloquium，2003，10：427-443.

[8] Vasil'ev A V，Grechkoseeva M A，Mazurov V D. Characterization of the finite simple Groups by spectrum and order[J]. Algebra and Logic，2009，48(6)：385-409.

[9] He L G，Chen G Y. A new characterization of simple K_3-groups[J]. Communications in Algebra，2012，40(10)：3903-3911.

[10] He L G，Chen G Y. A new characterization of $L_2(q)$ where $q\leqslant 125$[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics，2011，28：127-136.

[11] He L G，Chen G Y. A new characterization of sporadic simple groups[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics，2013，30：373-392.

[12] 何立官，陈贵云. 关于 $L_3(q)(q\leqslant 8)$ 和 $U_3(q)(q\leqslant 11)$ 的新刻画[J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(10)：81-87.

He L G，Chen G Y. A new characterization of $L_3(q)(q\leqslant$

8) and $U_3(q)(q\leqslant 11)$[J]. Journal of Southwest University: Nature Science Edition,2011,33(10):81-87.

[13] 何立官,陈贵云. 关于一些单群的新刻画[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2012,35(5):589-594.
He L G,Chen G Y. A new characterization of some simple groups[J]. Journal of Sichuan Normal University:Nature Science Edition,2012,35(5):589-594.

[14] 何立官,陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(2):46-49.
He L G,Chen G Y. A new characterization of some alternating groups[J]. Journal of Chongqing Normal University:Nature Science Edition,2013,30(2):46-49.

[15] 何立官,陈贵云. 关于单 K_3－群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(4):76-78.
He L G,Chen G Y. On simpleK_3－groups $L_3(3)$ and $U_3(3)$[J]. Journal of Chongqing Normal University:Nature Science Edition,2013,30(4):76-78.

[16] He L G, Chen G Y. A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$[J]. Advances in Mathematics (China),2014,43(5):667-670.

[17] 何立官,陈贵云. 关于 $3'$-单 K_4-群及其自同构群的新刻画[J]. 山西大学学报:自然科学版,2013,11:540-543.
He L G,Chen G Y. A new characterization of $3'$-simple K_4-groups and their automorphism groups[J]. Journal of Shanxi University:Nature Science Edition, 2013,11:540-543.

[18] Gorenstein D. Finite Groups[M]. New York:Chelsea Publishing Company,1980.

[19] Conway J H,Curtis R T,Norton S P,et al. ATLAS of finite groups[M]. Oxford:Clarendon Press,1985.

[20] Zhang Q L,Shi W J. A new characterization of simple K_3-groups and some $L_2(p)$[J]. Algebra Colloquium,2013,20(3):361-368.

A New Characterization of Some Simple Groups

HE Liguan, TONG Yin

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Let G be a finite group, $o_1(G)$ denote the largest element order of G. This paper shows that $F_4(2)$, ${}^2E_6(2)$,$O_{10}^+(2)$ can be uniquely determined only by using group order and the largest element order. That is to say, we proves that: Let G be a finite group,M be one of the following simple groups: $F_4(2)$,${}^2E_6(2)$,$O_{10}^+(2)$. Then $G\cong M$ if and only if $|G|=|M|$, and $o_1(G)=o_1(M)$.

Key words: finite group;simple group;the largest element order;characterization

(责任编辑 黄 颖)