

基于逆 MQ 函数的图像分割算法*

李淑玲¹, 陈勇²

(1. 重庆师范大学 数学学院; 2. 重庆师范大学 计算机与信息科学学院, 重庆 401331)

摘要:水平集方法广泛应用于图像分割,但传统水平集方法对初始轮廓位置敏感、且需要复杂费时的重新初始化过程。针对该问题,利用逆 MQ(Inverse multiquadrics)径向基函数,提出了一种新的图像分割算法。基于变分水平集方法的非线性发展方程被转化为数学上更易处理的常微分方程组。实验结果表明该算法无需重新初始化,对初始轮廓的大小和位置不敏感,并且在没有初始轮廓时也能够快速正确地分割图像,因此有效地克服了传统水平集方法的缺点。

关键词:径向基函数;图像分割;变分水平集方法;发展方程

中图分类号:TP391.41

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2015)02-0111-06

图像分割在图像处理和计算机视觉应用中非常重要,其目的是从图像区域中分离出目标,以便图像追踪和目标识别等。水平集方法在过去 20 年被广泛应用于图像分割和其他科学工程问题,它把目标边界当成零水平集嵌入到高维水平集函数中,通过求解非线性发展方程来演化边界曲线,是图像分割领域的研究热点之一^[1-3]。由水平集方法得到的发展方程通常需用迎风格式的有限差分法数值求解,这种差分法能够获得高精度解,但非常耗时。传统水平集方法对水平集函数初始轮廓的形状、位置和大小都比较敏感,而这些常常需要根据经验人工确定,所以存在较大的计算难度。另外,在数值演化过程中,还需要重新初始化来保持水平集函数的稳定性、规则性^[4]。重新初始化不仅算法复杂,而且需要周期性地重复进行,增大了算法的计算量,更严重的是数值误差容易使边界曲线不收敛于目标边界。文献[4-6]提出了一些新的水平集方法,它们不需要重新初始化,但在发展方程中添加了一些额外项,导致计算量和计算难度都较大。

径向基函数是 20 世纪 90 年代发展起来的一类数值求解微分方程定解问题的单变量函数,它的自变量是源点与场点之间的距离^[7-11]。近年来,Wang 等人^[12]和 Xie 等人^[13]分别用全局径向基函数求解了结构拓扑优化和可变形模型中的水平集发展方程,得到的插值函数虽然具有较高的精度,但由于采用的径向基函数仅仅条件正定,插值问题的唯一性需要添加方程才能保证,因此他们的数值算法的计算复杂度较大。在文献[12]的基础上,Gelas 等人^[14]借助紧支径向基函数数值求解了图像分割模型中的水平集发展方程。紧支径向基函数是严格正定的,但其求解精度低于全局径向基函数^[7],从而相应图像分割算法的演化收敛速度要慢一些。

将严格正定的全局径向基函数和图像分割中基于变分水平集方法的非线性发展方程相结合,本文建立了一种逆 MQ(Inverse multiquadrics)函数图像分割算法。用逆 MQ 径向基函数数值插值发展方程中的水平集函数,水平集发展方程被离散化为数学上更易处理的常微分方程组。因为全局逆 MQ 函数严格正定^[10],该算法既不需要文献[12]中的额外方程,也避免了传统水平集方法中的重新初始化,还不依赖于水平集函数的初始形状、位置和大小,甚至可以不要初始轮廓。实验表明,与文献[14]的方法和传统水平集方法^[4]相比,本文算法具有收敛速度快和计算时间短等优点。

1 基于变分水平集方法的发展方程

图像分割的目的是寻找一条或若干条曲线 C ,把图像区域 Ω 划分成互不重叠的背景区域和目标区域。曲线 C 可由 Lipschitz 连续的水平集函数 $\varphi(x)$ 表示为 $C = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(x) = 0\}$ 。为了使水平集函数 $\varphi(x)$ 在动力作用下

* 收稿日期:2013-09-06 修回日期:2014-12-15 网络出版时间:2015-01-22 11:56

资助项目:国家自然科学基金(No. 11101454);重庆市教委科技项目(No. KJ130626)

作者简介:李淑玲,女,助教,研究方向为图像处理,E-mail: shuling1124@163.com;通讯作者:陈勇,副教授,cyonghere@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1156.023.html>

及时变化,需要引入时间变量 t 和连续速度函数 $v(x,t)$ 。在变分水平集方法中,水平集函数 φ 满足如下初值问题^[1]

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\delta(\varphi(x,t)) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

其中 $\delta(\varphi) = \varepsilon / (\pi(\varepsilon^2 + \varphi^2))$ 是规范化的 Dirac 函数^[2], ε 是正常数, $\varphi_0(x)$ 表示曲线 C 在初始演化时刻 $t=0$ 时的位置。

在推导水平集发展方程(1)的图像分割模型中,最常用且最有代表性的是 C-V 模型^[2], 本文将以该模型为例推导基于正定径向基函数的图像分割算法,该模型中的能量泛函为

$$F(\varphi) = \gamma \int_{\Omega} \delta_{\varepsilon}(\varphi) \|\nabla \varphi\| dx + \lambda_1 \int_{\Omega} (I(x) - c_1(\varphi))^2 H(\varphi) dx + \lambda_2 \int_{\Omega_2} (I(x) - c_2(\varphi))^2 (1 - H(\varphi)) dx, \quad (3)$$

其中 $\gamma \geq 0, \lambda_1 > 0$ 和 $\lambda_2 > 0$ 都是固定的参数,

$$c_1(\varphi) = \int_{\Omega} I(x) H(\varphi) dx / \int_{\Omega} H(\varphi) dx, c_2(\varphi) = \int_{\Omega} I(x) (1 - H(\varphi)) dx / \int_{\Omega} (1 - H(\varphi)) dx$$

分别表示曲线 C 内部和外部的图像灰度平均值, $H(\varphi) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right) \right]$ 表示规范化的 Heaviside 函数。

(3)式右边第一项表示最小化由 $\varphi=0$ 得到的 C 的长度,因为逆 MQ 函数生成的插值函数全局光滑,所以该项可略去,即可取 $\gamma=0$; 右边第二、三项分别表示最小化 C 内部和外部的灰度值,所以可取权系数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 因此

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} (I(x) - c_1(\varphi))^2 H(\varphi) dx + \int_{\Omega_2} (I(x) - c_2(\varphi))^2 (1 - H(\varphi)) dx。$$

用最速下降法极小化 F , 可得如下变分水平集发展方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta_{\varepsilon}(\varphi) [-(I(x) - c_1(\varphi))^2 + (I(x) - c_2(\varphi))^2]。$$

从而, (1)式中的速度函数 $v(x,t)$ 可表示为 $v(x,t) = (I(x) - c_2(\varphi))^2 - (I(x) - c_1(\varphi))^2$ 。

2 逆 MQ 函数求解发展方程

在传统水平集方法中,上述初值问题(1)~(2)的求解需要适当的迎风差分格式和周期性重新初始化算法,这既增加了算法的复杂度,又增大了算法的计算量,因此限制了水平集方法在图像分割中的应用。

本文用逆 MQ 函数插值 $\varphi(x,t)$, 偏微分方程初值问题(1)~(2)被转换成数学上更易处理的常微分方程初值问题。同时,用逆 MQ 函数生成的近似函数是全局光滑的,避免了水平集函数初始化和重新初始化,有效地减少了计算量和复杂度。

变分水平集发展方程(1)依赖于时间,类似文献[12-14], 可令

$$\varphi(x,t) = \mu(x)\sigma(t), \quad (4)$$

其中 $\mu(x)$ 是仅依赖于空间变量 x 的函数, $\sigma(t)$ 是仅依赖于时间变量 t 的函数。将图像区域 Ω 用 N 个节点 $x_j (j=1, 2, \dots, N)$ 离散, 则 $\mu(x)$ 在 Ω 中可近似为

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^N r_i(x) b_i, \quad (5)$$

其中 $r_i(x)$ 是以节点 x_i 为中心的径向基函数, b_i 是待定系数。将(5)式代入(4)式,得

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=1}^N r_i(x) b_i \sigma(t) = \sum_{i=1}^N r_i(x) a_i(t), \quad (6)$$

其中 $a_i(t) = b_i \sigma(t)$ 是仅依赖于 t 的未知量。将(6)式代入(1)式,得

$$\sum_{i=1}^N r_i(x) \frac{da_i(t)}{dt} + v(x,t) \delta\left(\sum_{i=1}^N r_i(x) a_i(t)\right) = 0, \quad (7)$$

令(7)式在 N 个节点 x_j 上得到满足, 则可得 N 个常微分方程

$$\sum_{i=1}^N r_i(x_j) \frac{da_i(t)}{dt} + v(x_j,t) \delta\left(\sum_{i=1}^N r_i(x_j) a_i(t)\right) = 0, j=1, 2, \dots, N,$$

即

$$\mathbf{R} \frac{da(t)}{dt} + v(t, a(t)) = 0, \quad (8)$$

其中 $a(t) = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)]^T$, $v(t, a(t)) = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$, $v_j = v(x_j, t) \delta \left(\sum_{i=1}^N r_i(x_j) a_i(t) \right)$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(x_1) & r_2(x_1) & \cdots & r_N(x_1) \\ r_1(x_2) & r_2(x_2) & \cdots & r_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1(x_N) & r_2(x_N) & \cdots & r_N(x_N) \end{bmatrix}$ 。

在初始演化时刻 $t=0$, 令(6)式在 N 个节点 x_j 上得到满足, 再由(2)式可得 $\mathbf{R}a(0) = \varphi_0$, 其中 $\varphi_0 = [\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \dots, \varphi_0(x_N)]^T$ 已知, 据此可得方程组(8)的初始条件为

$$a(0) = \mathbf{R}^{-1} \varphi_0. \quad (9)$$

从而, 偏微分方程初值问题(1)~(2)转化为常微分方程初值问题(8)~(9)。

当系数矩阵 \mathbf{R} 可逆时, 初值问题(8)~(9)的解存在且唯一。由 $r_i(x_j) = r_j(x_i)$ 可知 \mathbf{R} 对称, 所以径向基函数严格正定时, 即 \mathbf{R} 正定时, \mathbf{R} 可逆。

全局径向基函数具有很高的插值精度, 但 Wang 等人^[12]和 Xie 等人^[13]采用的全局径向基函数仅仅条件正定, 插值问题的唯一性需要添加方程才能保证, 因此计算复杂度较大。Gelas 等人^[14]采用的紧支径向基函数是严格正定的, 但插值精度降低了, 致使相应图像分割算法的收敛速度较慢。由于逆 MQ 径向基函数 $r_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + |x - x_i|^2}}$ 是全局的和严格正定的^[10], 其中 β 是大于零的常数, 本文选用该函数。此时, 系数矩阵 \mathbf{R} 对称正定, 因此可逆, 从而(8)式化为 $\frac{da(t)}{dt} = -\mathbf{R}^{-1}v(t, a(t))$ 。令 $\tau > 0$ 表示步长, 则由向前 Euler 方法^[15], 上式可离散为

$$a(t_{n+1}) = a(t_n) - \tau \mathbf{R}^{-1}v(t_n, a(t_n)), n=0, 1, 2, \dots. \quad (10)$$

直接计算矩阵 \mathbf{R} 的逆运算量非常大。因为 \mathbf{R} 既对称又正定, 所以借助 Cholesky 分解算法^[15]可有效地避免 \mathbf{R}^{-1} 的计算。由 Cholesky 分解算法, $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, 这里 \mathbf{L} 为下三角矩阵, 从而在每次迭代时先求解下三角系统 $\mathbf{L}u_{n+1} = V(t_n, a(t_n))$ 和上三角系统 $\mathbf{L}^T v_{n+1} = u_{n+1}$ 。最后, (10)式等价于

$$a(t_{n+1}) = a(t_n) - \tau v_{n+1}, n=0, 1, 2, \dots. \quad (11)$$

类似于文献[14]中的性质 1, 可以证明迭代序列 $a(t_n)$ 的范数会随着 n 缓慢增长。数值实验时也发现 $a(t_n)$ 的范数可能会非常大。因为 $\varphi(x, t)$ 与任一非零实数的乘积不会改变曲线 C 的位置, 所以可以规范化(11)式的计算结果 $a(t_{n+1})$, 即令 $a(t_{n+1}) = \frac{a(t_{n+1})}{\|a(t_{n+1})\|}$ 。此时, 算法的终止条件为^[14]

$$\|a(t_n) - a(t_{n-1})\| \leq \|a(t_{n-1}) - a(t_{n-2})\|。$$

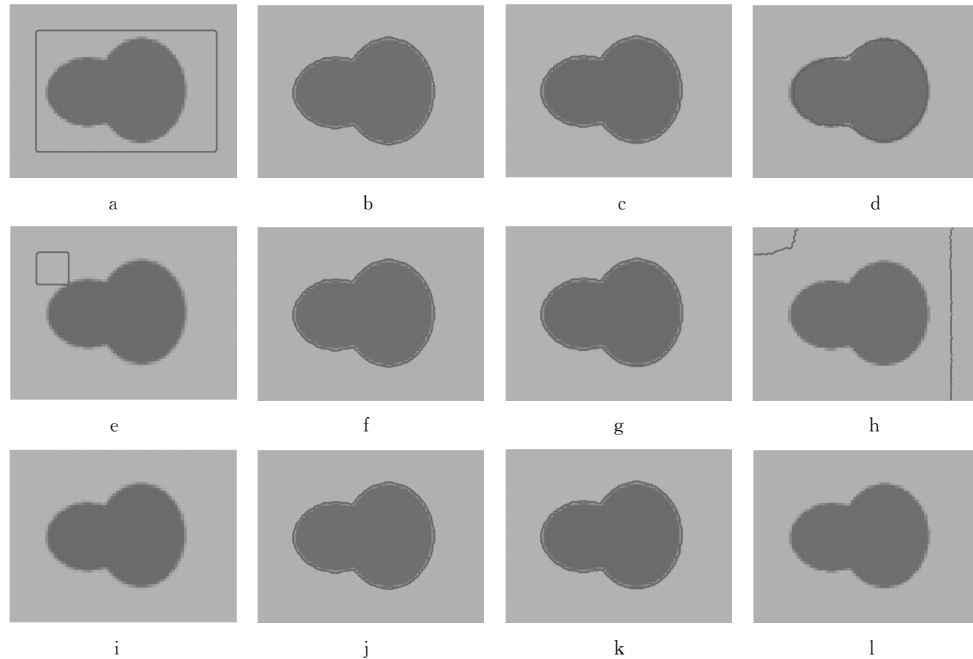
3 数值实验

分别采用本文算法、文献[14]的紧支径向基函数水平集算法、文献[4]的 C-V 模型有限差分水平集算法分割了一副人造图像和 4 幅测试图像。程序编写使用的是 Matlab 7.0.1, 运行平台是安装 Windows XP 操作系统的台式计算机(Intel 2.93 GHz 中央处理器和 2 GB 内存)。由实验结果可知, 本文算法相对文献[4, 14]中的算法在以下方面具有优势: 1) 对初始轮廓的大小和位置的敏感性较小; 2) 不需要重新初始化过程; 3) 在分割结果相同的情况下大大减少了迭代次数和计算时间。

首先用本文算法分割一副人造图像(图 1(i)), 图 1 给出了 3 种不同初始轮廓曲线时的分割结果。为了比较, 图 1 同时给出了文献[4, 14]中的算法的分割结果。可以看出, 初始轮廓曲线无论置于何处, 甚至没有给定初始轮廓时, 本文算法(图 1 第 2 列)和文献[14]的算法(图 1 第 3 列)都得到了正确的分割结果。对文献[4]的算法(图 1 第 4 列), 只有当初始轮廓完全包围目标物体时, 才能正确地分割(图 1(d)), 否则不能分割出目标物体(图 1(h, l))。

表 1 给出了 3 种算法对应的迭代次数和计算时间。本文算法的计算时间和迭代次数都最少, 且不依赖于初

始轮廓,所以更高效。为了详细评价 3 种算法的精度,表 1 还给出了 3 种算法的 Dice 相似性系数^[16]: $DSC = 2N(R_e \cap R_n) / (N(R_e) + N(R_n))$,这里 $N(\cdot)$ 表示区域中像素个数, R_e 和 R_n 分别表示精确的和数值算法获得的目标区域。易知, DSC 值越接近 1, 分割结果越精确。对 3 种初始轮廓曲线, 本文算法的 DSC 值与文献[14]的算法完全一样, 说明本文算法的分割结果很精确, 但文献[4]的算法的精度要差一些。



注:第 1 列是原始图像,其中实线表示初始轮廓曲线;第 2~4 列分别是本文算法、文献[14]和文献[4]中的算法的分割结果。

图 1 3 种算法对应于不同初始轮廓的分割结果

表 1 图 1 中分割结果对应的计算时间、迭代次数和 DSC 值

初始轮廓	本文算法			文献[14]的算法			文献[4]的算法		
	计算时间/s	迭代次数/次	DSC	计算时间/s	迭代次数/次	DSC	计算时间/s	迭代次数/次	DSC
图 1(a)	14.50	3	0.987 2	17.59	9	0.987 2	244.8	2 500	0.973 7
图 1(e)	15.16	3	0.987 2	17.48	9	0.987 2	494.5	5 000	0.357 1
图 1(i)	15.05	4	0.987 2	20.08	14	0.987 2	477.1	5 000	0

图 2 给出了本文算法和文献[14]的算法对 4 幅测试图像的分割结果。分割前的原始图像是:真实手掌图像(图 2(a)),含有孔洞区域的图像(图 2(d)),鞍马形深度图像(图 2(g)),以及部分目标跨越边界且目标边缘较弱的多目标细胞图像(图 2(j))。这 4 幅图像在分割过程中都没有采用初始轮廓,即水平集函数的演化均始于常数。从图 2 中可以看出,两种算法的分割结果都很好。同时,在实验过程中发现文献[4]的算法在进行 2 500 次迭代后还是无法得到最终的分割结果。

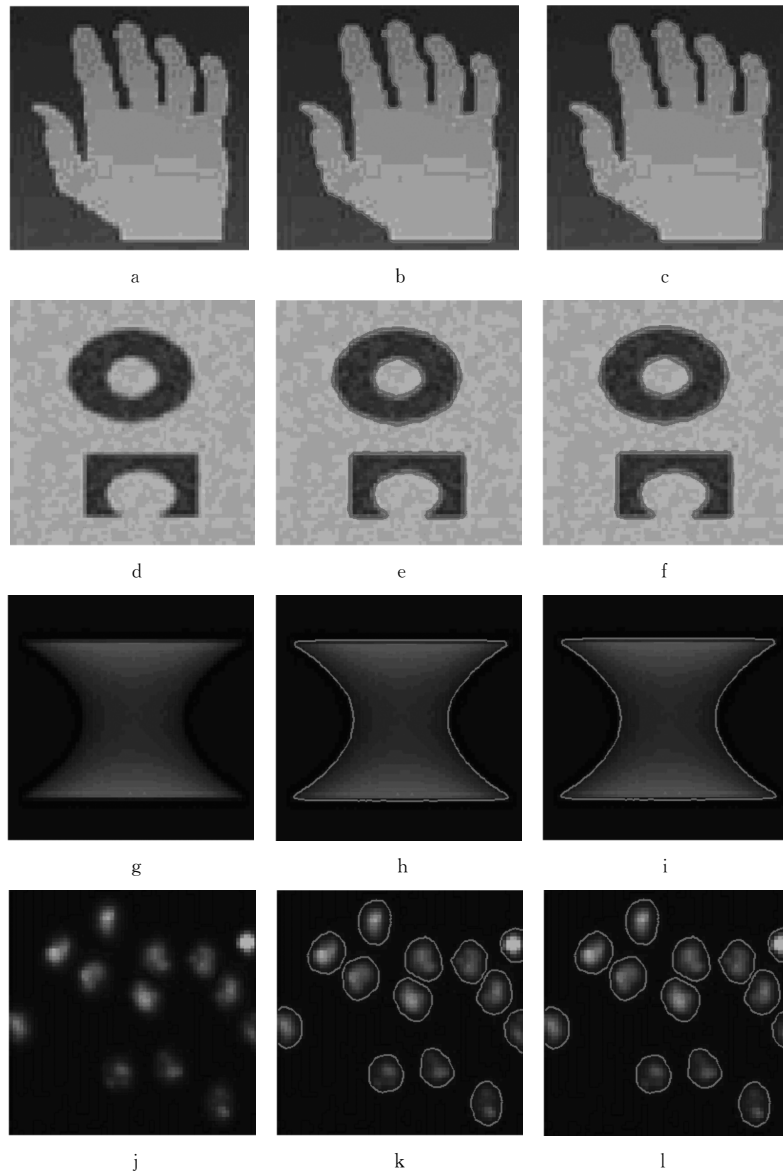
值得注意的是,图 2(g)中的鞍马形图像的灰度分布比较复杂,鞍马侧边缘呈屋顶状,底边缘呈阶梯状。对这类深度图像,文献[17]等提出的常值函数图像分割算法难于分割,本文算法分割结果却很好。另外,对图 2(j)给出的多目标图像,由于部分目标跨越区域边界,导致无法选取一条包含所有目标的初始曲线,所以文献[4]等提出的需要初始轮廓的图像分割算法难于分割,本文算法完全避免了轮廓初始化带来的问题,在没有给定初始轮廓时,经过几次迭代便能准确分割所有目标。

表 2 给出了两种算法分割 4 幅测试图像时的迭代次数和计算时间。显然,本文算法优于文献[14]的算法,从而计算效率更高、收敛速度更快。

4 结论

针对图像分割中的变分水平集发展方程,本文提出了一种基于逆 MQ 函数的图像分割算法。相比传统水平集方法,本文算法既不依赖于水平集初始轮廓的形状、位置和大小,也不需要复杂费时的周期性重新初始化过

程。另外,初始水平集函数可以不需要通过轮廓来定义,从而避免了轮廓初始化问题。数值实验表明本文算法在没有水平集初始轮廓时也能正确地分割图像,并且比基于有限差分格式的水平集方法和基于紧支径向基函数的图像分割算法具有更快的收敛速度,因此是一种有效的图像分割算法。



注:第 1 列是原始图像,第 2 列是本文算法的分割结果,第 3 列是文献[14]的算法的分割结果。

图 2 两种算法对应于不同图像的分割结果

表 2 图 2 中分割结果对应的计算时间和迭代次数

初始轮廓	本文算法		文献[14]的算法	
	计算时间/s	迭代次数/次	计算时间/s	迭代次数/次
图 2(a)	16.33	4	21.32	12
图 2(d)	21.55	5	27.29	14
图 2(g)	19.49	6	27.01	19
图 2(j)	21.58	12	29.93	26

参考文献:

[1] Tsai R, Osher S. Level set methods and their applications in image science[J]. Comm Math Sci, 2003, 1(4): 623-656.
 [2] Chan T, Vese L. Active contours without edges[J]. IEEE T Image Process, 2001, 10(2): 266-277.

- [3] 王芳梅,范虹,王凤妮. 水平集在图像分割中的应用研究[J]. 计算机应用研究,2012,29(4):1207-1210.
Wang F M, Fan H, Wang F N. Survey on application of level set in image segmentation[J]. Appl Res Comput, 2012, 29(4):1207-1210.
- [4] Li C M, Xu C Y, Gui C F, et al. Level set evolution without re-initialization: a new variational formulation[C]//Bhanu B, Peng J, Liu X W. Learning in Computer Vision and Pattern Recognition LCVPR 2005. San Diego, US: IEEE, 2005:430-436.
- [5] Wang Y, He C J. Adaptive level set evolution starting with a constant function[J]. Appl Math Model, 2012, 36(7):3217-3228.
- [6] Zhang K H, Zhang L, Song H H, et al. Re-initialization free level set evolution via reaction diffusion[J]. IEEE T Image Process, 2013, 22(1):258-271.
- [7] 张雄,刘岩. 无网格方法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
Zhang X, Liu Y. Meshless methods[M]. Beijing: Tsinghua Publications, 2004.
- [8] Li X L, Zhu J L, Zhang S G. A hybrid radial boundary node method based on radial basis point interpolation[J]. Eng Anal Bound Elem, 2009, 33(11):1273-1283.
- [9] Li X L, Zhu J L. The method of fundamental solutions for nonlinear elliptic problems[J]. Eng Anal Bound Elem, 2009, 33(3):322-329.
- [10] Cheng A H D, Golberg M A, Kansa E J, et al. Exponential convergence and h-c multiquadric collocation method for partial differential equations[J]. Numer Methods Partial Differential Eq, 2003, 19(5):571-594.
- [11] Mohebbi A, Abbaszadeh M, Dehghan M. The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time fractional nonlinear Schrodinger equation arising in quantum mechanics[J]. Eng Anal Bound Elem, 2013, 37(2):475-485.
- [12] Wang S Y, Wang M Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization[J]. Int J Numer Meth Eng, 2006, 65(12):2060-2090.
- [13] Xie X H, Mirmehdi M. Radial basis function based level set interpolation and evolution for deformable modelling[J]. Image Vision Comput, 2011, 29(2/3):167-177.
- [14] Gelas A, Bernard O, Friboulet D, et al. Compactly supported radial basis functions based collocation method for level-set evolution[J]. IEEE T Image Process, 2007, 16(7):1873-1887.
- [15] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 第5版. 北京:清华大学出版社,2008.
Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical analysis[M]. 5th edition. Beijing: Tsinghua Publications, 2008.
- [16] Shattuck D W, Sandor-Leahy S R, Schaper K A, et al. Magnetic resonance image tissue classification using a partial volume model[J]. Neuroimage, 2001, 13:856-876.
- [17] Du X, Bui T D. A new model for image segmentation[J]. IEEE Signal Process Let, 2008, 15:182-185.

An Algorithm Using Inverse Multiquadrics Functions for Image Segmentation

LI Shuling¹, CHEN Yong²

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University;

2. College of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The level set method is widely used in image segmentation. Traditional level set methods are highly sensitive to initial contours and need costly re-initialization procedures. To tackle this drawback, this paper develops a novel image segmentation algorithm using inverse multiquadrics radial basis functions. The nonlinear variational level set evolution equation is cast into a system of mathematically more convenient ordinary differential equations. Experimental results indicate that the proposed image segmentation algorithm is free of re-initialization, and can segment images quickly even without any initial contour. Thus, the drawback of traditional level set methods is avoided completely.

Key words: radial basis functions; image segmentation; variational level set method; evolution equations

(责任编辑 黄颖)