运筹学与控制论

# 非凸二次规划问题的一个全局优化方法

王 杉 林

(兰州商学院 陇桥学院，兰州 730101)

**摘要**：考虑的问题是线性约束下极小化二次目标函数的数学规划问题(QP)。在可行域是非空紧集假设下，利用KKT条件，将原问题等价转化为带线性互补约束、线性目标函数的问题(LPC)，对(LPC)提出了一个全局优化算法。该方法的主要思想是生成一个点对序列，使它或在有限步迭代后终止于(LPC)的最优解或收敛于(LPC)的最优解。证明了算法的收敛性，并通过求解构造的实例说明了此方法的有效性。

**关键词**：非凸二次规划；全局优化；线性互补问题；最优解；收敛性

**中图分类号**：O221.2

## 1　预备知识

本文将探讨有效求解一类非凸二次规划全局极小化问题，该问题的一般形式可表示为：

$$(\mathrm{QP})\qquad \begin{aligned} &\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+c^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}x\le b \end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{Q}$是$n\times n$的实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$的实矩阵,$c=(c_1,\dots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$b=(b_1,\dots,b_m)^{\mathrm{T}}$。若$\boldsymbol{Q}$是正定或半正定的，那么$(\mathrm{QP})$在多项式时间内是可解的。在本文中，我们考虑$\boldsymbol{Q}$是不定或半负定的情况。

设$D=\{x\in\mathbf{R}^n\mid \boldsymbol{A}x\le b\}$为$(\mathrm{QP})$问题的可行域,若$D$无界或非闭时，$(\mathrm{QP})$的全局极小值不一定存在。本文总假设$D$是$\mathbf{R}^n$中一个非空紧集，由维尔斯特拉斯定理(Weierstrass theorem)可知，$(\mathrm{QP})$问题至少存在一个最优解[1]。

对$(\mathrm{QP})$问题的全局最优解$x^*$，必存在拉格朗日乘子向量$\xi^*\in\mathbf{R}_+^m$，满足下列 KKT 条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}x^*+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi^*+c=0\\ \boldsymbol{A}x^*\le b,\xi^*\ge 0\\ \xi^{*T}(b-\boldsymbol{A}x^*)=0 \end{cases}$$

而对于满足KKT条件的$(x;\xi)$总有下面的关系成立：

-----------------------------

* **收稿日期**：2014.1.6　　**修回日期**：2014.3.1
**作者简介**：王杉林，男，讲师，主要研究方向是最优化理论与应用，E-mail：wangshanl554517@163.com

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+c^{\mathrm{T}}x=\frac{1}{2}c^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(c+\boldsymbol{Q}x)=\frac{1}{2}c^{\mathrm{T}}x-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi=\frac{1}{2}(c^{\mathrm{T}}x-b^{\mathrm{T}}\xi)$$

因此(QP)问题的最优解可通过求解下列带线性互补约束线性目标函数的极小化问题(LPC)得到[3]。

$$(\mathrm{LPC})\qquad \begin{aligned}&\min g(x,\xi)=\frac{1}{2}(c^{\mathrm{T}}x-b^{\mathrm{T}}\xi)\\ &\text{s.t.}\quad \begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi+c=0\\ \boldsymbol{A}x\le b,\xi\ge 0\\ \xi^{\mathrm{T}}(b-\boldsymbol{A}x)=0\end{cases}\end{aligned}$$

二次规划是一类非常重要的非线性规划问题，它有着广泛的实际背景，也是最优化领域的一个研究热点问题之一。在有约束的非凸二次规划中，已证明仅检验局部最优解是 NP-Hard 的[1,2]。从计算的角度来说，这意味着在最坏的情况下，要找到全局最优，计算花费的时间将会呈指数增长。解决这类问题，已有很多有效的方法。例如，Buret S.和 Vandenbussche D.用半定规划的方法得到了一个有限分支定界算法[3]，Sherali H.D.、Tuncbilek C.H.提出 ReformuIation–Linearization–Technique (RLT)方法[4] 以及 Vandenbussehe D.和 Nemhauser G.提出了分支切割方法[5]，在文[6]中作者利用全局最优性条件提出了一种求解双值混合二次规划的全局优化算法等。本文根据文[7]的思想提出了求解(LPC)最优解的一种全局最优化方法，该方法的基本思想是生成一个点对序列$\{(x^k;\xi^k)\}_{k=1,2,\dots}$,使它或在有限步内终止于(LPC)的最优解或收敛于(LPC)的最优解。本文其他内容安排如下：第二节给出了(LPC)的等价形式和松弛形式；在第三节提出了求解问题的全局优化算法并证明了算法的收敛性；在第四节构造了问题实例对所提出的算法进行了有效性验证。

## 2 等价形式和线性松弛形式

设 $w=b-\boldsymbol{A}x$，则存在有界多胞形 $W\subset\mathbf{R}_+^m$ ，问题(LPC)可以化为下列形式：

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{aligned}&\min g(x,\xi)=\frac{1}{2}(c^{\mathbf{T}}x-b^{\mathbf{T}}\xi)\\ &\textbf{s.t.}\quad \begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}\xi+c=0\\ \boldsymbol{A}x+w-b=0\\ \xi^{\mathbf{T}}w=0\\ \xi\ge 0,w\in W\subset\mathbf{R}_+^m\end{cases}\end{aligned}$$

问题(P)和问题(LPC)在下述意义下是等价的：

如果$(x^*,\xi^*)$是(LPC)的一个最优解,当且仅当$(x^*,\xi^*,w^*)$是(P)的一个最优解，此处 $w^*=b-\boldsymbol{A}x^*$。

令 $S$ 是包含于 $W$ 的一个多胞形且 $S$ 的顶点集合为 $V(S)=\{s^1,s^2,\dots,s^\pi\}$，考虑在问题(P)中将 $W$ 替换为 $S$ 后的问题(P(S))：

$$
(\mathrm{P(S)})\qquad \min g(x,\xi)=\frac{1}{2}(c^{\mathrm{T}}x-b^{\mathrm{T}}\xi)\quad \text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi+c=0\\ \boldsymbol{A}x+w-b=0\\ \xi^{\mathrm{T}}w=0\\ \xi\ge 0, w\in S\end{cases}
$$

基于 (P(S)) 定义下面的问题 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$：

$$
(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))\qquad \min g(x,\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i)=\frac{1}{2}(c^{\mathrm{T}}x-(\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i)^{\mathrm{T}}b)\quad \text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i)+c=0\\ \boldsymbol{A}x+(\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i s^i)-b=0\\ \sum_{i=1}^{\pi}(s^i)^T\xi^i=0,\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i=1\\ \xi^i\ge 0,\beta_i\ge 0, i=1,\dots,\pi,\end{cases}
$$

问题 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 和问题 (P(S)) 最主要的差别是引入了变向量 $\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^\pi$ 和 $\beta$ 去表示 $\xi$ 和 $w$，从而将问题 (P) 中的非线性约束 $\xi^{\mathrm{T}}w=0$ 松弛为 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 中的线性约束 $\sum_{i=1}^{\pi}(s^i)^{\mathrm{T}}\xi^i=0$ 。这种松弛技术具有下述性质：

**定理**1　设 $(x(S),\xi(S),w(S))$ 和 $(x(S),\xi^1(S),\dots,\xi^\pi(S),\beta(S))$ 分别表示 (P(S)) 和 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 的最优解；$g(S)$ 和 $\mu_1(S)$ 分别表示 (P(S)) 和 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 的最优值，那么：i) $\mu_1(S)\le g(S)$；ii) 如果 $\left(\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(S)s^i\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i(S)\right)=0$，那么 $(x(S),\xi(S),w(S))$ 是问题 (P(S)) 的一个最优解，此处 $\xi(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i(S)$，$w(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(S)s^i$。

**证明**　i) 由于对任意 $w\in S$ 都存在 $\beta_i\ge 0, i=1,2,\dots,\pi$，且 $\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i=1$ 使得 $w=\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i s^i$ 。定义 $\xi^i=\beta_i\xi$，显然有 $\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i=\xi$ 。因此对于 (P(S)) 的每个可行解 $(x,\xi,w)$ 都有 $(x,\xi^1,\dots,\xi^\pi,\beta)$ 与之相对应，且 $(x,\xi^1,\dots,\xi^\pi,\beta)$ 满足 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 的前两个约束；由于 $\sum_{i=1}^{\pi}(s^i)^{\mathrm{T}}\xi^i=\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(s^i)^{\mathrm{T}}\xi=\xi^{\mathrm{T}}w=0$，因此 $(x,\xi^1,\dots,\xi^\pi,\beta)$ 是 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 的一个可行解。这就说明 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 是 (P(S)) 的一个松弛问题，所以 $\mu_1(S)\le g(S)$ 。

ii) 设 $(x(S),\xi^1(S),...,\xi^{\pi}(S),\beta(S))$ 是 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$ 的一个最优解，取 $\xi(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i(S)$，$w(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(S)s^i$。明显地，$(x(S),\xi(S),w(S))$ 满足问题 $(P(S))$ 中除约束 $\xi(S)^{\mathrm{T}}w(S)=0$ 以外的其余约束，因此当 $\left(\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(S)s^i\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i(S)\right)=w(S)^{\mathrm{T}}\xi(S)=0$ 时，$(x(S),\xi(S),w(S))$ 是 $(\mathrm{P(S)})$ 的一个可行解，进而由(i)的结论可知，$(x(S),\xi(S),w(S))$ 是 $(\mathrm{P(S)})$ 的一个最优解。

下面来证明松弛问题最优值的一个单调性质。

**引理 1** 如果 $W$ 中两个多胞形 $S^1$、$S^2$ 满足 $S^2\subset S^1$，那么有 $\mu_1(S^1)\le\mu_1(S^2)$。

**证明.** 设 $V(S^1)=\{s^{11},s^{12},...,s^{1\pi_1}\}$，$V(S^2)=\{s^{21},s^{22},...,s^{2\pi_2}\}$ 分别是 $S^1$ 和 $S^2$ 的顶点集合。下面只需证：对 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^2))$ 的每一个最优解 $(x,\xi^{21},\xi^{22},...,\xi^{2\pi_2},\beta^2)$，必存在 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^1))$ 的可行解 $(x,\xi^{11},\xi^{12},...,\xi^{1\pi_1},\beta^1)$，使得 $g(x,\sum_{i=1}^{\pi_1}\xi^{1i})=g(x,\sum_{i=1}^{\pi_2}\xi^{2i})=\mu_1(S^2)$。

设 $w=\sum_{i=1}^{\pi_2}\beta_i^2 s^{2i}$。由于 $w\in S^2\subset S^1$，因此，存在向量 $\beta^1=(\beta_1^1,\beta_2^1,...,\beta_{\pi_1}^1)$，其中 $\beta_i^1\ge 0(i=1,...,\pi_1)$ 且 $\sum_{i=1}^{\pi_1}\beta_i^1=1$，使得 $w=\sum_{i=1}^{\pi_1}\beta_i^1 s^{1i}$。对 $S^2$ 的每个顶点 $s^{2i}(i=1,2,...,\pi_2)$，都存在向量 $\sigma^i=(\sigma_1^i,\sigma_2^i,...,\sigma_{\pi_1}^i)$，其中 $\sigma_j^i\ge 0(j=1,...,\pi_1)$ 且 $\sum_{j=1}^{\pi_1}\sigma_j^i=1$，使得 $s^{2i}=\sum_{j=1}^{\pi_1}\sigma_j^i s^{1j}$ .用 $\sigma^i(i=1,...,\pi_2)$ ,定义向量 $\xi^{1i}=\sum_{j=1}^{\pi_2}\sigma_i^j\xi^{2j}$ $(i=1,...,\pi_1)$。那么

$$\sum_{i=1}^{\pi_1}\xi^{1i}=\sum_{i=1}^{\pi_1}\sum_{j=1}^{\pi_2}\sigma_i^j\xi^{2j}=\sum_{j=1}^{\pi_2}\sum_{i=1}^{\pi_1}\sigma_i^j\xi^{2j}=\sum_{j=1}^{\pi_2}\xi^{2j}\sum_{i=1}^{\pi_1}\sigma_i^j=\sum_{j=1}^{\pi_2}\xi^{2j},$$

这说明 $(x,\xi^{11},\xi^{12},...,\xi^{1\pi_1},\beta^1)$ 是 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^1))$ 的一个可行解。因此，对 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^2))$ 的每一个可行解 $(x,\xi^{21},\xi^{22},...,\xi^{2\pi_2},\beta^2)$，必存在 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^1))$ 的可行解 $(x,\xi^{11},\xi^{12},...,\xi^{1\pi_1},\beta^1)$，使得 $g(x,\sum_{i=1}^{\pi_1}\xi^{1i})=g(x,\sum_{i=1}^{\pi_2}\xi^{2i})$。由定理2.1可知，$\mu_1(S^1)\le g(x,\sum_{i=1}^{\pi_1}\xi^{1i})=g(x,\sum_{i=1}^{\pi_2}\xi^{2i})=\mu_1(S^2)$。

## 3 全局优化算法和收敛性

基于上一节所给的松弛问题，我们在这一节给出求解问题(QP)的一个全局优化算法.算法中将$(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}))$的最优解$(x(S),\xi^1(S),\xi^2(S),\ldots,\xi^{\pi}(S),\beta(S))$用$(x(S),\xi(S),w(S))$来表示，其中$\xi(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\xi^i(S)$，$w(S)=\sum_{i=1}^{\pi}\beta_i(S)s^i$。

算法的主要思想是将(QP)问题转化为(LPC)后，通过求解与(LPC)等价的问题(P)，从而得到(QP)问题的最优解。对于问题(P)，构造多胞形序列$\{S^k\}_{k=1,2,\ldots}$和相对应的最优解序列$\{(x^k,\xi^k,w^k)\}_{k=1,2,\ldots}=\{x(S^k),\xi(S^k),w(S^k)\}_{k=1,2,\ldots}$满足：

(i) 存在某个 k 使得$(x^k,\xi^k,w^k)$是问题(P)的一个最优解；或者

(ii) 序列$\{(x^k,\xi^k,w^k)\}_{k=1,2,\ldots}$的每一个聚点是是问题(P)的一个最优解。

### 3.1　全局优化算法 (GOA)

初始化. 对于问题(P)，构造至少有点$w$的单纯形$W\subset\mathbf{R}_+^m$。令$S^1=W$，求解松弛问题$(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^1))$，获得最优解$(x^1,\xi^1,w^1)=(x(S^1),\xi(S^1),w(S^1))$和最优值$g(x^1,\xi^1)$，记$\mu^1=g(x^1,\xi^1)$。若$(w^1)^{\mathrm{T}}\xi^1=0$，则令$\gamma^1=g(x^1,\xi^1)$，$(\bar{x}^1,\bar{\xi}^1,\bar{w}^1)=(x^1,\xi^1,w^1)$。否则,令$\gamma^1=+\infty$. $k=1$, $R_1=\{S^1\}$。执行下面的步骤(i) 到(vi)。

i) 若$\gamma^k=\mu^k$，则停止。$(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$是问题(P)的最优解而$\gamma^k$是最优值；

ii) 若$\gamma^k>\mu^k$，则将$S^k$剖分成$S_1^k,S_2^k,\ldots,S_v^k$ 满足$\bigcup_{j=1}^{v}S_j^k=S^k$且 $\operatorname{int}S_j^k\cap\operatorname{int}S_{j'}^k=\varnothing$，此处$\operatorname{int}A$表示集合**A**的内部；

iii) 对每个$j=1,2,\ldots,v$，求解问题$(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^k))$，获得最优解$(x(S_j^k),\xi(S_j^k),w(S_j^k))$，对应的最优值为$g(x(S_j^k),\xi(S_j^k))$，记$\mu(S_j^k)=g(x(S_j^k),\xi(S_j^k))$。如果$w(S_j^k)^T\xi(S_j^k)=0$，那么更新$\gamma^k=\min\{\gamma^k,g(x(S_j^k),\xi(S_j^k))\}$，记与$\gamma^k$相对应的当前最好的可行解为$(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$；

iv) 令$\gamma^{k+1}=\gamma^k$，$(\bar{x}^{k+1},\bar{\xi}^{k+1},\bar{w}^{k+1})=(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$，$R_{k+1}=R_k\setminus\{S^k\}\bigcup\{S_j^k\mid j=1,2,\ldots,v\}$，$\mu^{k+1}=\min\{\mu(S):S\in R_{k+1}\}$。

v) 选择$S\in R_{k+1}$ 使$\mu(S)=\mu^{k+1}$，令$S^{k+1}=S$, $(x^{k+1},\xi^{k+1},w^{k+1})=(x(S^{k+1}),\xi(S^{k+1}),w(S^{k+1}))$。

vi) 执行下一步迭代。

上面的算法生成序列$\{(x^k,\xi^k,w^k),\mu^k,\gamma^k\}_{k=1,2,\ldots}$。可以证明$\{\mu^k\}_{k=1,2,\ldots}$是问题(P)最优值下界的一个不减序列，假如算法迭代至第$k$步终止，则$\mu^k=\gamma^k$且$(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$是最优解。

**引理2.** $\{\mu^k\}_{k=1,2,\ldots}$是问题(P)最优值下界的一个不减序列。

**证明** $\mu^k$是问题(P)最优值的下界是显然的，只需要证明单调性。 对任意$S\in R_k$，由算法在第(iv)步选择的$\mu^k$和第(v)步的$S^k$，容易知道$\mu(S^k)=\mu^k\le\mu(S)$ 。因为将$S_1^k,S_2^k,\ldots,S_v^k$ 加进$R_k$构成的$R_{k+1}$是$S^k$的一个子集，由引理1 可知对任意$j=1,2,\ldots,v$，都有$\mu(S^k)\le\mu(S_j^k)$。因而对任意$S\in R_{k+1}$有$\mu^k\le\mu(S)$ ，这说明序列$\{\mu^k\}_{k=1,2,\ldots}$是不减序列,即$\mu^k\le\mu^{k+1}$。 证毕

### 3.2 算法实现和收敛性

下面讨论如何选择初始单纯性及单纯性剖分规则和算法的收敛性。

构造初始单纯形。因为Z是紧集，定义非负实数$\varsigma_j$ ，$\zeta_j$ $(j=1,\ldots,m)$ 如下；

$$\varsigma_j=\max\{0,\min\{w_j:w=b-\boldsymbol{A}x,w_i\ge 0(i\ne j)\}\}\text{，}$$

$$\zeta_j=\max\{w_i:w=b-\boldsymbol{A}x,w_i\ge\varsigma_i(i=1,2,\ldots,m)\}\text{。}$$

如果某个$\zeta_j<0$， 则问题(P)是不可行的，这是因为不能满足约束$b-\boldsymbol{A}x\ge 0$。

假定 $\zeta_j\ge 0$（$j=1,2,\ldots,m$）， 定义数$\theta$和集合$W$如下：

$$\theta=\max\left(\sum_{i=1}^m w_i:w=b-\boldsymbol{A}x,w\ge\varsigma\right),\quad W=\left(w\in\mathbf{R}_+^m:w_j\ge\varsigma_j(j=1,\ldots,m),\sum_{j=1}^m w_j\le\theta\right)\text{。}$$

显然$W$是有m + 1个顶点$w^1,\ldots,w^{m+1}$（此处$w^{m+1}=(\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m)$）的单纯形且对每个$j=1,\ldots,m$，顶点$w^j$定义如下：

$$w_j^j=\theta-\sum_{i=1}^m\varsigma_i+\varsigma_j\text{，}\quad w_i^j=\varsigma_i\qquad(i=1,\ldots,m;i\ne j)\text{。}$$

单纯形剖分。设S是有顶点集$V(S)=\{s^1,\ldots,s^{m+1}\}$的单纯形，选择点$r\in S\setminus V(S)$，其唯一被表示为

$r=\sum_{i=1}^{m+1}\beta_i s^i$，其中$\beta_i\ge 0\quad(i=1,2,\ldots,m+1)$，且$\sum_{i=1}^{m+1}\beta_i=1$。

定义单纯形$S_i=co\{s^1,\ldots,s^{i-1},r,s^{i+1},\ldots,s^{m+1}\}$，这儿$coA$表示$A$的凸包。

(GOA)的收敛性。

**定理2** 当算法(**GOA**)在第(i)步终止时，$(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$ 是问题 (P) 的一个最优解。

**证明** 注意到当算法终止时 $g(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k)=\bar{\gamma}^k=\bar{\mu}^k$ 成立，且由引理3.1可知 $\bar{\mu}^k$ 是问题 (P) 的最优值的一个下界且又 $\bar{\xi}^k,\bar{w}^k$ 满足互补约束 $(\bar{w}^k)^T\bar{\xi}^k=0$，因此 $(\bar{x}^k,\bar{\xi}^k,\bar{w}^k)$ 是问题 (P) 的一个全局最优解。　证毕

**定理3** 若问题 (P) 有最优解 ，由算法(**GOA**)生成序列 $\{(x^k,\xi^k,w^k)\}_{k=1,2,\dots}$ 的每一个聚点是问题 (P) 的全局最优解。

**证明** 设 $(x^*,\xi^*,w^*)$ 是序列 $\{(x^k,\xi^k,w^k)\}_{k=1,2,\dots}$ 的任意聚点，$\{(x^k,\xi^k,w^k)\}_{k\in K}$ 是收敛于 $(x^*,\xi^*,w^*)$ 的子序列。 因为集合 $\{(x,w)\mid \boldsymbol{A}x+w-b=0,w\in W_+^m\}$ 是闭集，故 $x^*\ge 0,w^*\in W,\boldsymbol{A}x^*+w^*-b=0$。

假定对任意 $i=1,\dots,m$ 有 $\xi^{ki}\to\xi^{i*}$，从定理3.2知 $\{\mu^k\}_{k\in K}=\{\mu(S^k)\}_{k\in K}$ 是问题 (P) 的最优值 $g^*$ 的单调不减有界序列，所以 $\{\mu^k\}_{k\in K}$ 存在极限 $\mu^*$。因为剖分是穷尽的，所以 $\bigcap_{k\in K}S^k=\{s^*\}$, $s^*\in W$，因此 $S^k$ 的顶点 $s^{ki}(i=1,2,\dots,m+1)$，都有 $s^{ki}\to s^*$，从而 $w^*=s^*$。注意到 $\sum_{i=1}^{m+1}(s^{ki})^{\mathrm{T}}\xi^{ki}=0$， 则有

$$0=\lim_{k\in K}\sum_{i=1}^{m+1}(s^{ki})^{\mathrm{T}}\xi^{ki}=\sum_{i=1}^{m+1}\lim_{k\in K}((s^{ki})^{\mathrm{T}}\xi^{ki})=\sum_{i=1}^{m+1}\lim_{k\in K}(s^{ki})^{\mathrm{T}}(\lim_{k\in K}\xi^{ki})=$$

$$\sum_{i=1}^{m+1}(s^*)^{\mathrm{T}}(\lim_{k\in K}\xi^{ki})=(s^*)^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m+1}(\lim_{k\in K}\xi^{ki})=(s^*)^{\mathrm{T}}\left(\lim_{k\in K}\sum_{i=1}^{m+1}\xi^{ki}\right)=(s^*)^{\mathrm{T}}(\lim_{k\in K}\xi^k)=(s^*)^{\mathrm{T}}\xi^*$$

可知，$(x^*,\xi^*,w^*)$ 是问题 (P) 的一个全局最优解。　证毕

## 4　数值实例计算

构造如下数值实例来说明算法的实现过程：

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}x\le b\end{aligned}$$

其中: $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-2&4\\4&-8\end{bmatrix}$， $c=(2,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix}-4\\2\\3\end{bmatrix}$。

将此问题转化为下列带线性互补约束线性目标函数的问题：

$$\min g(x,\xi)=\frac{1}{2}(c^{\mathrm{T}}x-b^{\mathrm{T}}\xi)$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi+c=0,\\ \boldsymbol{A}x\le b,\\ \xi^{\mathrm{T}}(b-\boldsymbol{A}x)=0,\\ x\ge 0,\xi\ge 0\end{cases}$$

它等价于下面的问题：

$$\min g(x,\xi)=\frac{1}{2}(c^{\mathbf{T}}x-b^{\mathbf{T}}\xi)$$

$$\textbf{s.t.}\quad\begin{cases}\boldsymbol{Q}x+\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}y+c=0,\\ \boldsymbol{A}x+w-b=0,\\ \xi^{\mathbf{T}}w=0,\\ x\ge 0,\xi\ge 0,w\in W\subset\mathbf{R}_{+}^{3}\end{cases}$$

其中$W$是根据3.2节的方法所构造的单纯形， $W=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$。

令 $S^1=W$， 解松弛问题 $(\mathrm{P}_1(S^1))$ 得到最优解 $(x(S^1),\xi(S^1),w(S^1))$，其中 $x(S^1)=(1,3)^T$，$\xi(S^1)=(12,0,28)^T$， $w(S^1)=(0,1,0)^T$，最优值 $\mu^1=\mu(S^1)=g(S^1)=-11$。由于 $\xi(S^1)^T w(S^1)=0$，$(x(S^1),\xi(S^1),w(S^1))$ 是 $(\mathrm{P}_1(\mathrm{S}^1))$ 的一个可行解，所以 $x=(1,3)^T$ 是原问题的最优解,最优值为$-11$。

**参考文献：**


[1] Horst R,Pardalos P M,Thoai N V.全局优化引论[M].黄红选译.北京:清华大学出版社,2003.

[2] Pardlos P M,Vavasis S A.Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard [J].Global Optim, 1991,1(1):15-22.

[3] Vandenbusscite D, Nemhauser G. A branch-and-cut algorithmn for nonconvex quadratic programs with box constraints[J]. Math Program, 2005, 102(3):559-575.

[4] Sherali H D,Tuncbilek C H. A reformulation-convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems[J]. Global Optim, 1995,7:1-31.

[5] Burer S,Vandenbussche D. A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidifinite relaxations[J]. Math Program, 2008, 113(2): 259-282.

[6] 吴至友. 求解全局优化问题的一种新方法[J]. 重庆师范大学学报（自然科学版）,2009, 26(04):1-8.

Wu Z Y. A New Method for Global Optimization Problems[J].Journal of Chongqing Normal University (NaturalScience), 2009, 26(04):1-8.

[7] Thoai N V, Yamamoto Y, Yoshise A.Global optimization method for solving mathematical programs with linear

complementarity constraints[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2005,124(2):467-490.

[8] Fukushima M, Luo Z Q , Pang J S.A Global convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints[J], Computational Optimization and Applications. 1998, 10: 5- 34.

**Operations Research and Cybernetics**

# A Global Optimization Methods for Non-convex Quadratic Programming

WANG Shanlin

(College of Longqiao,Lanzhou University of Finance and Economics,Lanzhou 730101,China)

**Abstrct:** In this paper, considering the problem (QP) is that minimum quadratic objective function with linear constraints. Under the hypothesis of the feasible region is non-empty compact set, using the KKT conditions of the problem, to bring the original problem is transformed into the problem of linear objective function with complementarity constraints(LPC). On a global optimization algorithm is proposed. The main idea of the method is to generate a sequence of points either ending at a global optimal solution within a finite number of iterations or converging to a global optimal solution of the (LPC). To prove the finite convergence of the algorithm, and by solving construction example is given to illustrate the effectiveness of this method.

**Keywords:** nonconvex quadratic programming; global optimization; linear complementary problem; optimal solution; convergence.