基于最大模原理的双边空间分数阶方程的二阶隐式有限差分法

朱 琳[12]，芮洪兴[12]

（1. 宁夏大学 数学与计算机学院，银川 750021；2. 山东大学 数学学院，济南 250100）

摘要：应用最大模原理，给出一类解变系数双边空间分数阶偏微分方程的隐式有限差分格式,并证明这类格式当分数阶导数$\alpha\in[\sqrt{17}-1/2,2]$时无条件稳定且由此得出其收敛阶为$O(\Delta t+h^2)$。最后给出数值算例验证。

关键词：变系数双边空间分数阶偏微分方程;有限差分格式;无条件稳定;收敛阶

中图分类号：O175.2 **文献标志码**： A **文章编号**：

近几十年来，分数阶微分方程在工程、物理、金融、流体等领域得到了广泛的应用[1-3]。因为分数阶导数具有良好的局部记忆性质，所以许多自然物理过程和动力系统过程用分数阶微分方程模拟通常比整数阶微分方程更符合实际情况。对于一般的分数阶微分方程，比如变系数微分方程，其解析解是我们无法给出的，而有的方程即使能求出其解析解，其解析解中大多都包含有特殊函数，其近似计算非常困难，故对于分数阶微分方程的数值算法的研究就显得非常重要。

目前，国内外许多学者都致力于研究分数阶偏微分方程的数值解，2003 年，Lynch 等人[4]给出两种数值方法，分别利用 L2 方法和 L2C 方法离散空间分数阶导数。2004 年，Meerschaert 和 Tadjeran 等人[5]提出移位 Grünwald-Letnikov 算子求解单边及双边空间分数阶对流-扩散方程的有限差分格式，用 Gerschgorin 定理证明了稳定性，且收敛阶为一阶。2005 年，Yuste 等人[6]应用 Von-Neumann 方法分析了分数阶微分方程的有限差分格式。2006 年，孙志忠教授等人[7]利用能量方法证明了全离散格式的对流-波动方程的稳定性。2007 年，刘发旺和庄平辉等人[8]研究了时间-空间分数阶对流-扩散方程的显式和隐式差分格式，但是收敛阶为一阶。2009 年，许传炬教授[9]提出了解时间分数阶扩散方程的谱方法。还有很多学者做的工作这里不一一详述。

本文研究下列变系数双边空间分数阶偏微分方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=c_+(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha}+c_-(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}+s(x,t), \tag{1}$$

其中，$L\prec x\le R,0\le t\le T,1\prec\alpha\prec 2,c_+(x,t)\ge 0,c_-(x,t)\ge 0,s(x,t)$是源项。

满足的初边值条件为：

$$u(x,t=0)=F(x),u(L,t)=u(R,t)=0\text{。} \tag{2}$$

本文基于最大模原理的思想，将利用经典 Grünwald-Letnikov 算子和移位 Grünwald-Letnikov 算子进行加权平均构造新的算子先来近似求解方程（1）中左、右导数项$\frac{\partial^\varepsilon u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha},\frac{\partial^\varepsilon u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}$，给出空间上具有

收稿日期：2014-01-07 修回日期：2014-05-04 资助项目：宁夏高等学校科学技术研究项目（No.NGY2013018）
作者简介：朱琳，女,副教授,研究方向为偏微分方程数值解、计算流体力学, E-mail：xqdeng2002@163.com

二阶精度的隐式有限差分格式，并且用最大模原理证明其稳定性及其收敛性。

1 预备知识

在方程（1）中，关于左、右α阶导数的 Riemann-Liouville 形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}\displaystyle\int_{L}^{x}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}\xi\\ \dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}=\dfrac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}\displaystyle\int_{L}^{x}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}\xi\end{cases},\tag{3}$$

其中，$n\succ\alpha\succ n-1\geq 0$（$n$为整数），$\Gamma$是伽马函数。

计算左、右 Riemann-Liouville 导数的经典 Grünwald 公式和移位 Grünwald 公式分别为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=0}^{K_{+}}g_{k}u(x-kh,t)+O(h)\\ \dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=0}^{K_{+}}g_{k}u(x-(k-1)h,t)+O(h)\end{cases},\tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=0}^{K_{-}}g_{k}u(x+kh,t)+O(h)\\ \dfrac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=0}^{K_{-}}g_{k}u(x+(k-1)h,t)+O(h)\end{cases},\tag{5}$$

其中，K_{+},K_{-}是正整数，g_{k}是 Grünwald 系数，且定义如下：

$$g_{0}=1,g_{k}=(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}=(-1)^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}。\tag{6}$$

另外，g_{k}还具有如下性质：

$$\begin{cases}g_{1}=-\alpha\prec 0,1\geq g_{2}\geq g_{3}\geq\cdots\geq 0\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}g_{k}=0,\sum_{k=0}^{m}g_{k}\leq 0(m\geq 1)\end{cases}。\tag{7}$$

2 二阶隐式差分格式的建立

令$t_{n}=n\Delta t,x_{i}=L+ih,v_{i}^{n}\approx u(x_{i},t_{n}),c_{+,i}^{n}=c_{+}(x_{i},t_{n}),c_{-,i}^{n}=c_{-}(x_{i},t_{n}),s_{i}^{n}=s(x_{i},t_{n})$，其中，$i=0,1,\cdots,K,n=0,1,\cdots,\leq T/\Delta t$，$\Delta t$和$h=R-L/K$分别表示时间和空间上的步长。

将（4）式和（5）式加权平均近似计算$\dfrac{\partial^{\varepsilon}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}},\dfrac{\partial^{\varepsilon}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}$代入方程（1）中得如下有限差格式：

$$\frac{v_{i}^{n+1}-v_{i}^{n}}{\Delta t}=\frac{c_{+,i}^{n+1}}{h^{\alpha}}\left[(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{i}g_{k}v_{i-k}^{n+1}+\varepsilon\sum_{k=0}^{i+1}g_{k}v_{i-k+1}^{n+1}\right]+$$

$$\frac{c_{-,i}^{n+1}}{h^{\alpha}}\left[(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{K-i}g_k v_{i+k}^{n+1}+\varepsilon\sum_{k=0}^{K-i+1}g_k v_{i+k-1}^{n+1}\right]+s_i^{n+1}, \tag{8}$$

其中，ε 是加权系数且 $0\prec\varepsilon\prec 1$。

令 $\xi_i=\dfrac{c_{+,i}^{n+1}\Delta t}{h^{\alpha}},\eta_i=\dfrac{c_{-,i}^{n+1}\Delta t}{h^{\alpha}}$ 且知 $\xi_i\geq 0,\eta_i\geq 0$，从而方程（8）式可以变形为

$$\begin{aligned}&[1-\xi_i(1-\varepsilon)g_0-\xi_i\varepsilon g_1-\eta_i(1-\varepsilon)g_0-\eta_i\varepsilon g_1]v_i^{n+1}-[\xi_i\varepsilon g_0+\eta_i(1-\varepsilon)g_1+\eta_i\varepsilon g_2]v_{i+1}^{n+1}-\\&[\xi_i(1-\varepsilon)g_1+\xi_i\varepsilon g_2+\eta_i\varepsilon g_0]v_{i-1}^{n+1}-\xi_i\sum_{k=3}^{i+1}[(1-\varepsilon)g_{k-1}+\varepsilon g_k]v_{i-k+1}^{n+1}-\\&\eta_i\sum_{k=3}^{K\text{-}i+1}[(1-\varepsilon)g_{k-1}+\varepsilon g_k]v_{i+k-1}^{n+1}=v_i^n+\Delta t s_i^{n+1}。\end{aligned} \tag{9}$$

考虑了方程（1）的初边值条件，可以把（9）式写成如下的矩阵形式：

$$AU^{n+1}=U^n+\Delta tS^{n+1}, \tag{10}$$

其中：

$$\begin{aligned}&U^{n+1}=[v_1^{n+1},v_2^{n+1},\cdots,v_{K-1}^{n+1}]^{\mathrm{T}},\\&S^{n+1}=[s_1^{n+1},s_2^{n+1},\cdots,s_{K-1}^{n+1}]^{\mathrm{T}},\\&A=(A_{ij})_{(K-1)\times(K=1)},\end{aligned} \tag{11}$$

$$A=\begin{cases}1-\xi_i(1-\varepsilon)g_0-\xi_i\varepsilon g_1-\eta_i(1-\varepsilon)g_0-\eta_i\varepsilon g_1\ ,j=i\\ \text{-}\xi_i\varepsilon g_0\text{-}\eta_i(1-\varepsilon)g_1\text{-}\eta_i\varepsilon g_2\ ,j=i+1\\ \text{-}\xi_i(1-\varepsilon)g_1\text{-}\xi_i\varepsilon g_2\text{-}\eta_i\varepsilon g_0\ ,j=i\text{-}1\\ \text{-}\xi_i[(1-\varepsilon)g_{i\text{-}j}+\varepsilon g_{i\text{-}j+1}]\ \ ,j\leq i\text{-}2\\ \text{-}\eta_i[(1-\varepsilon)g_{j-i}+\varepsilon g_{j-i+1}]\ \ ,j\geq i+2\end{cases}。 \tag{12}$$

下面证明当 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$ 时，隐式有限差分格式（8）具有二阶精度。

定理 1　设 $f\in L_1(R)$ 且 $f\in C^{\alpha+1}(R)$，设：

$$B_h f(x)=\frac{(1-\varepsilon)}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}g_k f(x-kh)+\frac{\varepsilon}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}g_k f(x-(k-1)h), \tag{13}$$

$$Bf(x)=\frac{d^{\alpha}f(x)}{d_+x^{\alpha}}, \tag{14}$$

$Bf(x)$ 是 liouville 分数阶导数定义，积分下限是 $-\infty$。

则当 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$ 时，对 $\forall x\in\mathbf{R}^1$ 都有 $B_h f(x)=Bf(x)+O(h^2)$ 成立。

证明　设 $F[f](k)=\bar{f}(k)=\int e^{ikx}f(x)dx$ 是 f(x)的傅里叶展开，则 $e^{ikh}\bar{f}(k)$ 是 f(x−h)的傅里叶展

开。令

$$A_h f(x)=h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g_k f(x-(k-p)h)\,, \tag{15}$$

将上式进行傅里叶展开，并且由（6）式可得

$$F[A_h f](k)=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{\alpha}{m}e^{ik(m-p)h}\,\bar{f}(k)=\frac{1}{h^{\alpha}}e^{-ikph}(1-e^{ikh})^{\alpha}\,\bar{f}(k)= \\ \frac{1}{h^{\alpha}}(-ikh)^{\alpha}(\frac{1-e^{ikh}}{-ikh})^{\alpha}e^{-ikph}\,\bar{f}(k)=(-ik)^{\alpha}w(-ikh)\,\bar{f}(k), \tag{16}$$

其中，$(iu)^{\alpha}=\operatorname{sign}(u)|u|^{\alpha}\exp(i\pi\alpha/2),u\in\mathbf{R}$，且

$$w(z)=(\frac{1-e^{-z}}{z})^{\alpha}e^{zp}=1-(p-\frac{\alpha}{2})z+(\frac{p^2}{2}+\frac{\alpha}{6}-\frac{\alpha p}{2})z^2+O(|z|^3)\text{。} \tag{17}$$

令 $p=0,1$ 得

$$\begin{aligned} w_0(z)&=1+\frac{\alpha}{2}z+\frac{\alpha}{6}z^2+O(|z|^3) \\ w_1(z)&=1-(1-\frac{\alpha}{2})z+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})z^2+O(|z|^3) \end{aligned}\,, \tag{18}$$

由上式知

$$\bar{w}(z)=(1-\varepsilon)w_0(z)+\varepsilon w_1(z)=(1-\varepsilon)(1+\frac{\alpha}{2}z)+\varepsilon[1-(1-\frac{\alpha}{2})z]+O(|z|^2)= \\ 1+\frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)z-\varepsilon(1-\frac{\alpha}{2})z+O(|z|^2) \tag{19}$$

则令 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$，则得 $\bar{w}(z)=1+(O|z|^2)$，即对于 $\forall x\in\mathbf{R},|\bar{w}(-ix)-1|\le C|x|^2$。
又因为

$$F[B_h f](k)=(-ik)^{\alpha}[(1-\varepsilon)w_0(-ikh)+\varepsilon w_1(-ikh)]\,\bar{f}(k)=(-ik)^{\alpha}\,\bar{f}(k)+ \\ (-ik)^{\alpha}(\bar{w}(-ikh)-1)\,\bar{f}(k)=F[Af](k)+\bar{\phi}(h,k), \tag{20}$$

其中，$\bar{\varphi}(h,k)=(-ik)^{\alpha}(\bar{w}(-ikh)-1)\,\bar{f}(k)$ 且 $\phi(h,k)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\bar{\phi}(h,k)\mathrm{d}k$。

因为 $f\in L_1(R)$ 且 $f\in C^{\alpha+1}(R)$，则得

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}(1+|k|)^{\alpha+1}\left|\bar{f}(k)\right|dk\prec\infty$$

所以 $|\bar{\varphi}(h,k)|\le|k|^{\alpha}C|kh^2|\left\|\bar{f}(k)\right|$，从而 $|\varphi(h,k)|\le Ch^2$。

因此，对于 $\forall x\in\mathbf{R},B_h f(x)=Bf(x)+O(h^2)$ 成立。 证毕

对于右导数项，用同样的证明方法可以得到相似的结论。

定理 2 设 $f \in L_1(\mathbf{R})$ 且 $f \in C^{\alpha+1}(\mathbf{R})$，设：

$$D_h f(x) = \frac{(1-\varepsilon)}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g_k f(x+kh) + \frac{\varepsilon}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g_k f(x+(k-1)h),$$

$$Df(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{d\_x^\alpha},$$

$Bf(x)$ 是 liouville 分数阶导数定义，积分下限是 $-\infty$。

则当 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ 时，对 $\forall x \in \mathrm{R}^1$ 都有 $D_h f(x) = Df(x) + O(h^2)$ 成立。

3 稳定性分析

为了给出稳定性条件，先对方程组（10）～（12）的系数矩阵做如下分析。

当 $1 \prec \alpha \prec 2,$ 且 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ 时，$\alpha\varepsilon - (1-\varepsilon) \succ 0$ 自然成立，所以

$$Aii = 1 - \xi_i(1-\varepsilon)g_0 - \xi_i\varepsilon g_1 - \eta_i(1-\varepsilon)g_0 - \eta_i\varepsilon g_1 \succ 0。 \tag{21}$$

若 $g_2\varepsilon + g_1(1-\varepsilon) \ge 0$，由（7）式可得

$$\frac{\alpha^2}{2}\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\varepsilon - \alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}。 \tag{22}$$

当 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ 时，（22）式等价于 $\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} - 2 \ge 0$，又有 $1 \prec \alpha \prec 2,$ 可以得到此不等式的解为

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} \le \alpha \le 2。 \tag{23}$$

综合上面分析和（7）式，从而可以得到：

$$\begin{aligned}
&A_{i,i+1} = -\xi_i\varepsilon g_0 - \eta_i(1-\varepsilon)g_1 - \eta_i\varepsilon g_2 \ = -\xi_i\varepsilon g_0 - \eta_i[(1-\varepsilon)g_1 + \varepsilon g_2] \le 0 \\
&A_{i,i-1} = -\xi_i(1-\varepsilon)g_1 - \xi_i\varepsilon g_2 - \eta_i\varepsilon g_0 \ = -\xi_\mathrm{i}[(1-\varepsilon)g_1 + \varepsilon g_2] - \eta_i\varepsilon g_0 \le 0 \\
&A_{i,j} = -\xi_i[(1-\varepsilon)g_{i\text{-}j} + \varepsilon g_{i\text{-}j+1}] \le 0 \quad ,j \le i\text{-}2 \\
&\mathrm{A_{i,j}} = \eta_i[(1-\varepsilon)g_{j-i} + \varepsilon g_{j-i+1}] \le 0 \quad ,j \ge i+2
\end{aligned}。 \tag{24}$$

综合以上分析，得到下面稳定性定理：

定理 3 若 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ 且 $\frac{\sqrt{17}-1}{2} \le \alpha \le 2$，则对于（9）式定义的加权二阶有限差分格式：

（Ⅰ）$\max\limits_{\le i \le K-1}\left|v_i^{l+1}\right| \le \max\limits_{\le i \le K-1}\left|v_i^l + \Delta t S_i^l\right|$ （25）

（Ⅱ）$\max\limits_{1\le i\le K-1}\left|v_i^{n+1}\right| \le \max\limits_{1\le i\le K-1}\left|v_i^0\right| + \sum\limits_{l=1}^{n}\Delta t \max\limits_{1\le i\le K-1}\left|S_i^l\right|$　　（26）

（Ⅲ）$\left\|v_i^{n+1}\right\| \le \left\|v_i^0\right\| + \sum\limits_{l=1}^{n}\Delta t\left\|S_i^l\right\|$　　（27）

证明　（Ⅰ）用反证法。记 $M_{l+1} = \max\limits_{\le i\le K-1}\left|v_i^{n+1}\right|$，假设对某个 l 使得（25）式不成立，则记 i_0 是集合 $\left\{i \mid \left|v_i^{l+1}\right| = M_{l+1}, i = 1,\cdots,K-1\right\}$ 中的最小值, 则

$$v_{i_0-1}^{l+1} \prec M_{l+1},\quad v_{i_0+1}^{l+1} \prec M_{l+1},\quad v_i^{l+1} \prec M_{l+1}, i \le i_0 - 2,\quad v_i^{l+1} \prec M_{l+1}, i \ge i_0 + 2$$

由（21），（24）式，且方程（9）左边的所有系数加起来等于一，则对这个 l 代入方程（9）：

$$(9)\text{式左边} \succ A_{i_0 i_0}M_{l+1} + A_{i_0,i_0+1}M_{l+1} + A_{i_0,i_0-1}M_{l+1} + \sum_{j=0}^{i-2}A_{i_0,j}M_{l+1} + \sum_{j=i_0+2}^{K-1}A_{i_0,j}M_{l+1} =$$

$$M_{l+1} = v_{i_0}^{l+1} \succ \max_{1\le i\le K-1}\left|v_i^l + \Delta t S_i^l\right|。$$

由此得到矛盾，所以（25）式成立。

（Ⅱ）由（25）式可直接推得：$\max\limits_{1\le i\le K-1}\left|v_i^{n+1}\right| \le \max\limits_{1\le i\le K-1}\left|v_i^n\right| + \Delta t \max\limits_{1\le i\le K-1}\left|S_i^n\right|$，反复用这个公式就可以得到结论（Ⅱ）。

（Ⅲ）由范数的等价性，自然成立。

4 收敛性分析

定理 4　设 $u(x_i,t_n)$ 是方程（1）～（2）的准确解，v_i^n 是二阶加权有限差分格式（8）的计算值，则当 $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ 且 $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \le \alpha \le 2$ 时，使得

$$\max_{1\le i\le K-1}\left|v_i^n - u(x_i,t_n)\right| \le C(\Delta t + h^2),\ \ n = 1,2,\cdots,\frac{T}{\Delta t}，\text{其中 } C \text{ 是正常数。}$$

证明　令 $e_i^n = v_i^n - u(x_i,t_n)$，且 R_i^n 表示点 (x_i,t^n) 的截断误差，则：

$$R_i^n(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c_+\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} - c_-\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha}\right)(x_i,t_{n+1}) - \frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n)}{\Delta t} +$$
$$\frac{c_+(x_i,t_{n+1})}{h^\alpha}\left[(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{i}g_k u(x_{i-k},t_{n+1}) + \varepsilon\sum_{k=0}^{i+1}g_k u(x_{i-k+1},t_{n+1})\right] +$$
$$\frac{c_-(x_i,t_{n+1})}{h^\alpha}\left[(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{K-i}g_k u(x_{i+k},t_{n+1}) + \varepsilon\sum_{k=0}^{K-i+1}g_k u(x_{i+k-1},t_{n+1})\right] = O(\Delta t + h^2)。$$

设 $E^n=\left[e_1^n,e_2^n,\cdots,e_{K-1}^n\right]^T$，$R^n=\left[R_1^n,R_2^n,\cdots,R_{K-1}^n\right]^{\mathrm{T}}$，直接计算就可以得到

$$\begin{cases}AE^{n+1}=\Delta tR^{n+1}\\E_0^{n+1}=0,\ E_K^{n+1}=0\\E_i^0=0,i=0,1,\cdots,K\end{cases},\tag{28}$$

由定理 3 的结论（Ⅱ）可得

$$\max_{1\le i\le K-1}\left|v_i^n-u(x_i,t_n)\right|\le\sum_{l=1}^{n}\Delta t\max_{1\le i\le K-1}\left|R_i^l\right|\le C(\Delta t+h^2)\text{。}$$

5 数值算例

考虑如下变系数双边分数阶偏微分方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=c_+(x,t)\frac{\partial^{1.8}u(x,t)}{\partial_+x^{1.8}}+c_-(x,t)\frac{\partial^{1.8}u(x,t)}{\partial_-x^{1.8}}+s(x,t),\quad 0\le x\le 2,\quad t\succ 0,\tag{29}$$

其中 $s(x,t)=-32e^{-t}[x^2+(2-x)^2-2.5(x^3+(2-x)^3)+\frac{25}{22}(x^4+(2-x)^4)]$, $c_+(x,t)=\Gamma(1.2)x^{1.8}$, $c_-(x,t)=\Gamma(1.2)(2-x)^{1.8}$, 其边界条件为 $u(0,t)=u(2,t)=0$，初始条件为 $u(x,0)=4x^2(2-x)^2$。此方程的精确解为 $u(x,t)=4e^{-t}x^2(2-x)^2$。

表 1 给出了此方程当 $t=1.0$ 时由本文提出的加权隐式有限差分方法得到的最大误差 $E=\|e\|_{l^\infty}=\max\limits_{0\le i\le K}\left|u(x_i,t^n)-v_i^n\right|$ 和收敛阶 $Rate=\log_2(E_1/E_2)/\log_2(h_1/h_2)$，$E_1,E_2$ 代表相邻两次的最大误差，h_1,h_2 代表相邻两次的步长。从表中可以看到，本文所构造的加权隐式有限差分格式具有二阶精度，需要说明的是时间步长都取空间步长的平方，这样可以达到整体收敛阶为二阶。

表 1　方程（29）用加权二阶隐式有限差分求解在 $t=1.0$ 时的最大误差和收敛阶

	$\|e\|_{l^\infty}$	Rate
$(\frac{1}{10^2},\frac{1}{10})$	0.1149	-
$(\frac{1}{15^2},\frac{1}{15})$	0.0446	2.33

$(\frac{1}{20^2},\frac{1}{20})$	0.0253	1.97
$(\frac{1}{25^2},\frac{1}{25})$	0.0161	2.025
$(\frac{1}{30^2},\frac{1}{30})$	0.0112	1.99
$(\frac{1}{35^2},\frac{1}{35})$	1.0082	2.02
$(\frac{1}{40^2},\frac{1}{40})$	0.0063	1.99

参考文献：

[1] Bouchaud J P, Reorges A. Anomalous diffusion in disordered media-statistical mechanisms models and physical applications[J]. Phys Rep, 1990, 195:127-293.

[2] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics[M]. World Scientific. Singapore, 2000.

[3] Sokolov I M, Klafter J, Blumen A. Fractional kinetics[J].Physics Today, 2002, 55:28-53.

[4] Lynch V E, Carreras B A, Del-Castillo-Negrete D, et al. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order[J]. J Comput Phys, 2003, 192: 406-421.

[5] Meerschaert M M, Tadjeran C.Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations[J]. J Comput Appl Math, 2004, 172:65-77.

[6] Yuste S B, Acedo L. An explicit finite difference method and a new von Neumamnn-type stability analysis for fractional diffusion equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2005, 42:1862-1874.

[7] Sun Z Z, Wu X N. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system[J].Applied Numerical Mathematics, 2006, 56:193-209.

[8] Liu F, Zhuang P, Anh V, et al. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation[M]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191:12-20.

[9] Li X J, Xu C J. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation[J]. SIAM J Numer Anal, 2009, 47:2108-2131.

[10] 郭柏灵，蒲学科，黄凤辉.分数阶偏微分方程及其数值解[M].北京：科学出版社,2011.

[11] 程金发.分数阶差分方程理论[M]. 厦门：厦门大学出版社, 2011.

A Kind of Second-order Implicit Finite Difference Methods for Two-sided Space Fractional Partial Differential Equations Based on the Maximum Modulus Principle

ZHU Lin, RUI Hongxing

（1. School of Mathematics and Computer Science, NingxiaUniversity, Yinchuan 750021;
2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China）

Abstract: Based on the maximum modulus principle, a kind of implicit finite difference schemes for two-sided space fractional partial differential equations with variable coefficient is introdued. This kind of schemes' unconditionally stable and convergence rate $O(\Delta t + h^2)$ with fractional derivative α belonging to $[\sqrt{17}-1/2,2]$ are proved. Numerical examples are given to show the efficiency and the convergence rate of presented schemes.

Key words: two-sided space fractional partial differential equations; finite difference scheme; unconditionally stable; convergence rate

(责任编辑 游中胜)