伪度量空间中第七类压缩型映象的不动点定理*

向长合[1]，罗纳[2]
（1.重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2.重庆市第六十六中学，重庆 404000）

摘要：通过将度量空间定义中的三角不等式条件减弱为$d(x,y)\le Md(x,z)+d(z,y)$对非空集合X中的所有x,y,z成立，其中，$M\ge 1$是一个常数，引入了伪度量空间，并通过实例说明伪度量空间是对度量空间的真推广。在完备的伪度量空间中，证明了第七类压缩型映象存在唯一不动点，并且，其迭代序列收敛于此唯一不动点。进一步，对第六类压缩型映象给出了迭代序列逼近于不动点的误差估计。

关键词：不动点；伪度量空间；第七类压缩型映象；误差估计
中图分类号： O177. 91

自 1922 年 Banach 压缩映象原理被提出以来，压缩映象的概念和原理已经从各个方面和各个不同的角度有了新的重要发展[1-5]。

在文献[1]中，张石生按照压缩条件的不同，将压缩型映象划分为 160 类，其中，第七类压缩型映象是非常广泛的一类映象，第一类、第二类、第四类、第五类和第六类压缩型映象都是第七类压缩型映象的特例，并在完备的度量空间中，给出了大量的经典不动点定理。1993 年，苏永福在文献[2]中将度量空间定义中的三角不等式条件减弱为：存在常数$M\ge 1$，对任意的$x,y,z\in X$，有$d(x,y)\le M[d(x,z)+d(z,y)]$成立，引入了仿度量空间，并将 Banach 压缩映象（即第一类压缩型映象）原理从完备的度量空间推广到了完备的仿度量空间。

本文引入一类比度量空间更加广泛的特殊的仿度量空间，将其命名为伪度量空间，目的是在完备的伪度量空间中，讨论第七类压缩型映象不动点的存在唯一性及迭代逼近，进一步，对第六类压缩型映象给出迭代序列逼近于不动点的误差估计。

1　伪度量空间

定义 1　设X是非空集合，d：$X\times X\to \mathbf{R}^1$满足:

---

[1] **收稿日期：**2014-05-06
资助项目：国家自然科学基金（No. 11171363）
作者简介：向长合，男，副教授，研究方向：不动点理论及其应用，E-mail：xch@cqnu.edu.cn;通讯作者：向长合，E-mail: xch@cqnu.edu.cn

1) $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$时成立；

2) $d(x,y)=d(y,x)$；

3) 存在常数$M\geq 1$，对任意的$x,y,z\in X$，有$d(x,y)\leq Md(x,z)+d(z,y)$。

则称d是X上的伪度量，(X,d)称为伪度量空间。

度量空间一定是伪度量空间，但是，伪度量空间不一定是度量空间。

例 1 设集合$X=\{0,1,2\}$，定义d：$X\times X\to \mathbf{R}^1$为

$$\begin{cases} d(0,0)=d(1,1)=d(2,2)=0 \\ d(0,1)=d(1,0)=d(1,2)=d(2,1)=1, \\ d(0,2)=d(2,0)=3 \end{cases}$$

则d：$X\times X\to \mathbf{R}^1$显然满足定义 1 中前面两个条件，并且，对任意的$x,y,z\in X$，有

$$d(x,y)\leq 2d(x,z)+d(z,y),$$

即，(X,d)是伪度量空间；由于$d(0,2)=3>d(0,1)+d(1,2)=2$，所以，(X,d)不是度量空间。

性质 1 若(X,d)是伪度量空间，则$d(x,y)\geq 0$，$\forall x,y\in X$。

证明 $\forall x,y\in X$，有

$$0=d(x,x)\leq Md(x,y)+d(y,x)=(M+1)d(x,y),$$

从而，$d(x,y)\geq 0$，$\forall x,y\in X$。 **证毕**

性质 2 若(X,d)是伪度量空间，则$d(x,y)\leq d(x,z)+Md(z,y),\forall x,y,z\in X$。

注 1 在伪度量空间中，我们可以按通常方式定义点列的极限，并得到极限的唯一性，同时，也可以按通常方式定义 Cauchy 列以及伪度量空间的完备性。

2 主要结果

定理 1 设(X,d)是完备的伪度量空间，$T:X\to X$是第七类压缩型映象，即，T满足条件C_7：存在单调递减的函数$a(t)$，$b(t)$，$c(t):(0,+\infty)\to[0,1)$满足$a(t)+b(t)+c(t)<1$，$\forall t\in(0,+\infty)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leq a(d(x,y))d(x,y)+b(d(x,y))d(x,Tx)+c(d(x,y))d(y,Ty),\forall x\neq y\in X$$

则T在X中存在唯一不动点x^*，任取$x_0\in X$，$x_n=Tx_{n-1}=T^n x_0(n=1,2,3,\cdots)$，有$\{x_n\}$收敛于$x^*$。

证明　第一步，令 $b_n = d(x_{n-1}, x_n)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

不妨设对于任意给定的自然数 n，都有 $b_n \neq 0$（否则，若存在自然数 n_0，使得 $b_{n_0} = 0$，则 $b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \cdots = 0$，结论显然成立），即，$x_{n-1} \neq x_n$。因 T 满足条件 C_7，有

$$b_{n+1} = d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq$$

$$a(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) + b(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) + c(d(x_{n-1}, x_n))d(x_n, x_{n+1}),$$

化简，得

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a(d(x_{n-1}, x_n)) + b(d(x_{n-1}, x_n))}{1 - c(d(x_{n-1}, x_n))} d(x_{n-1}, x_n),\ (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1}$$

设 $q(t) = \dfrac{a(t) + b(t)}{1 - c(t)}$，由于 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内非负单调递减，且当 $t \in (0, +\infty)$ 时，有 $a(t) + b(t) + c(t) < 1$，从而，$q(t): (0, +\infty) \to [0, 1)$ 单调递减。由(1)式，得

$$b_{n+1} = d(x_n, x_{n+1}) \leq q(b_n) b_n < b_n .$$

即，$\{b_n\}$ 是单调递减的非负数列，其极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p$。

现证 $p = 0$。反设 $p > 0$，由于 $b_n \geq p > 0$（$n = 1, 2, 3, \cdots$），$q(t): (0, +\infty) \to [0, 1)$ 单调递减，从而，$q(b_n) \leq q(p) < 1$（$n = 1, 2, 3, \cdots$），且

$$p \leq b_{n+1} \leq q(b_n) b_n \leq q(p) b_n \leq \cdots \leq (q(p))^n b_1 \to 0 (n \to \infty),$$

这与 $p > 0$ 矛盾，因此，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p = 0$。

第二步，证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列。

对任给的自然数 m 和 n，若 $k_{m,n} = d(x_{m-1}, x_{n-1}) \neq 0$，由条件 C_7、伪度量空间的定义及性质 2，有

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, Tx_{n-1}) \leq$$

$$a(k_{m,n})d(x_{m-1}, x_{n-1}) + b(k_{m,n})d(x_{m-1}, x_m) + c(k_{m,n})d(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$a(k_{m,n})[Md(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_{n-1})] + b(k_{m,n})d(x_{m-1}, x_m) + c(k_{m,n})d(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$a(k_{m,n})[Md(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_n) + Md(x_n, x_{n-1})] + b(k_{m,n})d(x_{m-1}, x_m) + c(k_{m,n})d(x_{n-1}, x_n)$$

化简，得

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{Ma(k_{m,n}) + b(k_{m,n})}{1 - a(k_{m,n})} d(x_{m-1}, x_m) + \frac{Ma(k_{m,n}) + c(k_{m,n})}{1 - a(k_{m,n})} d(x_{n-1}, x_n), \tag{2}$$

令 $r(t)=\dfrac{Ma(t)+b(t)}{1-a(t)}$， $s(t)=\dfrac{Ma(t)+c(t)}{1-a(t)}$，由于 $a(t)$，$b(t)$，$c(t):(0,+\infty)\to[0,1)$ 单调递减，从而，$r(t)$ 和 $s(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减。由(2)式，得

$$d(x_m,x_n)\le r(k_{m,n})d(x_{m-1},x_m)+s(k_{m,n})d(x_{n-1},x_n)\,. \tag{3}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_{n-1},x_n)=0$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$d(x_{n-1},x_n)<\frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{r(\varepsilon)},\frac{\varepsilon}{s(\varepsilon)},\varepsilon\right\},$$

其中，若 $r(\varepsilon)=s(\varepsilon)=0$，则规定 $\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{r(\varepsilon)},\dfrac{\varepsilon}{s(\varepsilon)},\varepsilon\right\}=\varepsilon$，若 $r(\varepsilon)$ 和 $s(\varepsilon)$ 中有一个为零，则作类似规定。

当 $m,n>N$ 时，分如下 3 种情形进行讨论：

1) 若 $k_{m,n}=d(x_{m-1},x_{n-1})\ge\varepsilon$，由于 $r(t)$ 和 $s(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，由(3)式，得

$$d(x_m,x_n)\le r(k_{m,n})d(x_{m-1},x_m)+s(k_{m,n})d(x_{n-1},x_n)\le r(\varepsilon)d(x_{m-1},x_m)+s(\varepsilon)d(x_{n-1},x_n)$$

$$<r(\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{r(\varepsilon)}+s(\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{s(\varepsilon)}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

2) 若 $0<k_{m,n}=d(x_{m-1},x_{n-1})<\varepsilon$，则

$$d(x_m,x_n)=d(Tx_{m-1},Tx_{n-1})$$

$$\le a(k_{m,n})d(x_{m-1},x_{n-1})+b(k_{m,n})d(x_{m-1},x_m)+c(k_{m,n})d(x_{n-1},x_n)$$

$$\le a(k_{m,n})\varepsilon+b(k_{m,n})\varepsilon+c(k_{m,n})\varepsilon<\varepsilon\,.$$

3) 若 $d(x_{m-1},x_{n-1})=0$，则 $d(x_m,x_n)=d(Tx_{m-1},Tx_{n-1})=0<\varepsilon$.

综上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $m,n>N$ 时，都有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$，即，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列。由于 (X,d) 是完备的伪度量空间，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。

第三步，证明 x^* 是 T 的不动点。对于任给的自然数 n，当 $l_n=d(x_n,x^*)\ne0$，即，$x_n\ne x^*$ 时，有

$$d(x_{n+1},Tx^*)=d(Tx_n,Tx^*)\le a(l_n)d(x_n,x^*)+b(l_n)d(x_n,x_{n+1})+c(l_n)d(x^*,Tx^*)\le$$

$$a(l_n)d(x_n,x^*)+b(l_n)d(x_n,x_{n+1})+c(l_n)\left[Md(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx^*)\right],$$

另一方面，由对称性，得

$$d(x_{n+1},Tx^*)=d(Tx^*,Tx_n)\le a(l_n)d(x^*,x_n)+b(l_n)d(x^*,Tx^*)+c(l_n)d(x_n,x_{n+1})\le$$

$$a(l_n)d(x_n,x^*)+b(l_n)\left[Md(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx^*)\right]+c(l_n)d(x_n,x_{n+1}),$$

将上面两式左右两端相加，得

$$2d(x_{n+1},Tx^*)\le 2a(l_n)d(x_n,x^*)+\left[b(l_n)+c(l_n)\right]d(x_n,x_{n+1})+$$

$$M\left[c(l_n)+b(l_n)\right]d(x^*,x_{n+1})+\left[c(l_n)+b(l_n)\right]d(x_{n+1},Tx^*)\le$$

$$2d(x_n,x^*)+d(x_n,x_{n+1})+Md(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx^*),$$

移项，得

$$d(x_{n+1},Tx^*)\le 2d(x_n,x^*)+d(x_n,x_{n+1})+Md(x^*,x_{n+1}) \tag{4}$$

当 $x_n=x^*$ 时，有 $d(x_{n+1},Tx^*)=d(Tx_n,Tx^*)=0$，(4)式显然成立，即，对于任意给定的自然数 n，(4)式都成立，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，在(4)式两端取极限，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=Tx^*$，由极限的唯一性，得 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=Tx^*$，即，$x^*$ 是 T 的不动点。

第四步，证明 x^* 是 T 的唯一不动点。假设 $\bar{x}$ 也是 T 的不动点，即 $\bar{x}=T\bar{x}$，若 $x^*\ne\bar{x}$，由条件 C_7，得

$$d(x^*,\bar{x})=d(Tx^*,T\bar{x})\le$$

$$a(d(x^*,\bar{x}))d(x^*,\bar{x})+b(d(x^*,\bar{x}))d(x^*,Tx^*)+c(d(x^*,\bar{x}))d(\bar{x},T\bar{x})=a(d(x^*,\bar{x}))d(x^*,\bar{x})<d(x^*,\bar{x}),$$

矛盾，从而，$x^*=\bar{x}$。所以，T 只有唯一不动点。　　　　　　　　　　　　　　　　　**证毕**

在定理 1 中，取 $b(t)=c(t)=0$，$\forall t\in(0,+\infty)$，则有如下推论 1。

推论 1　设 (X,d) 是完备的伪度量空间，$T:X\to X$ 是第二类压缩型映象，即，T 满足条件 C_2：存在单调递减的函数 $a(t):(0,+\infty)\to[0,1)$，使得 $d(Tx,Ty)\le a(d(x,y))d(x,y)$，$\forall x\ne y\in X$，则 T 在 X 中存在唯一不动点 x^*，且任取 $x_0\in X$，迭代序列 $\left\{x_n=T^nx_0\right\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛于 x^*。

定理 2　设 (X,d) 是完备的伪度量空间，$T:X\to X$ 是第六类压缩型映象，即，T 满足条件 C_6：存在常数 $a,b,c\ge 0$ 满足 $a+b+c<1$，使得 $d(Tx,Ty)\le ad(x,y)+bd(x,Tx)+cd(y,Ty)$，$\forall x,y\in X$，则 T 在 X 中存在唯一不动点 x^*，任取 $x_0\in X$，$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0(n=1,2,3,\cdots)$，有 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，并有如下误差估计：

$$d(x_n,x^*)\le\frac{M\beta^n}{1-\beta}d(x_0,x_1),$$

其中，$\beta=\dfrac{a+b}{1-c}\in[0,\ 1)$。

证明 在定理 1 中，取函数 $a(t),b(t),c(t)$ 分别等于常数 a,b,c，则由定理 1，T 在 X 中存在唯一的不动点 x^*，任取 $x_0\in X$，令 $x_n=Tx_{n-1}=T^n x_0(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*。令 $\beta=\dfrac{a+b}{1-c}$，则 $\beta\in[0,\ 1)$，由(1)式，得

$$d(x_n,x_{n+1})\le\frac{a+b}{1-c}d(x_{n-1},x_n)=\beta d(x_{n-1},x_n)\le\cdots\le\beta^n d(x_0,x_1),\ (n=1,2,3,\cdots),$$

根据伪度量空间的定义，对任意给定的自然数 m 和 n，有

$$d(x_n,x_{n+m})\le Md(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+m})\le Md(x_n,x_{n+1})+Md(x_{n+1},x_{n+2})+d(x_{n+2},x_{n+m})\le$$

$$Md(x_n,x_{n+1})+Md(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+Md(x_{n+m-2},x_{n+m-1})+d(x_{n+m-1},x_{n+m})\le$$

$$M(\beta^n+\beta^{n+1}+\cdots+\beta^{n+m-1})d(x_0,x_1)\le\frac{M\beta^n}{1-\beta}d(x_0,x_1),$$

让 $m\to\infty$，在上式两端取极限，则得到 $\{x_n\}$ 收敛于 x^* 的误差估计式：

$$d(x_n,x^*)\le\frac{M\beta^n}{1-\beta}d(x_0,x_1).$$ **证毕**

在定理 2 中，取常数 $a=0$，$b=c=h\in[0,\dfrac{1}{2})$，则有如下推论 2。

推论 2 设 (X,d) 是完备的伪度量空间，$T:X\to X$ 是第四类压缩型映象，即，T 满足条件 C_4：存在常数 $h\in[0,\dfrac{1}{2})$，使得

$$d(Tx,Ty)\le h[d(x,Tx)+d(y,Ty)],\quad \forall x,y\in X,$$

则 T 在 X 中存在唯一不动点 x^*，任取 $x_0\in X$，$x_n=Tx_{n-1}=T^n x_0(n=1,2,3,\cdots)$，有 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，并有如下误差估计：

$$d(x_n,x^*)\le\frac{M\beta^n}{1-\beta}d(x_0,x_1),$$

其中，$\beta=\dfrac{h}{1-h}\in[0,\ 1)$。

注 2 第四类压缩型映象不一定连续，例如设 $X=[0,1]$，并使用通常的距离 d，则 (X,d) 是度量空间，从而是伪度量空间，定义 $Tx=\begin{cases}0, & 0\le x<\\ \dfrac{1}{4}, & x=\end{cases}$，则 $T:X\to X$ 且

$d(Tx,Ty) \le \frac{1}{3}[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$，$\forall x,y \in X$，即，$T$ 是第四类压缩型映象，但 T 不连续。由于第四类压缩型映象是第六类和第七类压缩型映象的特例，从而定理 1、定理 2 和推论 2 中的映象都不一定连续。

注 3　当伪度量空间为度量空间时，上述结果即为文[1]中已有经典结果，由于伪度量空间是对度量空间的真推广，因此上述结果是对文[1]中相应结果的推广。

参考文献：

[1] 张石生.不动点理论及应用[M].重庆:重庆出版社,1984.

Zhang S S.Fixed Point Theory and Applications [M].Chongqing:Chongqing Publishing Group,1984.

[2] 苏永福.关于半度量空间中的压缩映象原理[J].纯粹数学与应用数学,1993,9(1):57-64.

Su Y F. On the contraction principle in half-metric space [J]. Pure and Applied Mathematics,1993,9(1):57-64.

[3] Liu Q Y, Liu Z B, Huang N J. Approximating the common fixed points of two sequences of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces [J].Applied Mathematics and Computation,2010,216:883–889

[4] Xiang C H.Fixed point theorem for generalized Φ -pseudocontractive mappings [J].Nonlinear Analysis,2009,70:2277-2279.

[5] 毛巧莉,向长合.Banach 空间中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象不动点的迭代逼近[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(1):53-58.

Mao Q L,Xiang C H.Approximation of fixed points of asymptotically k-strict pseudocontractive mapping in the intermediate sense [J].Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2013,30(1):53-58.

Fixed Point Theorem for the Seventh Class Contraction Type Mappings in Pseudo-metric Space

XIANG Chang-he[1]，LUO Na[2]

(1.　College of Mathematics，Chongqing Normal University，Chongqing 401331;

2.The sixty-sixth Middle School of Chongqing, Chongqing 404000，China;)

Abstract: This paper introduces pseudo-metric space by weakening the triangle inequality condition in the definition of metric space as $d(x,y) \le Md(x,z)+d(z,y)$ holds for all $x,y,z \in X$, where $M \ge 1$ is a constant. An example in this paper shows that the class of metric spaces is a proper subset of the class of pseudo-metric spaces. In a complete pseudo-metric space, it is proved that the seventh class contraction type mapping has a unique fixed point and the iterative sequence converges to the unique fixed point. Furthermore, the error estimates for the sixth class contraction type mapping are given.

Keywords: Fixed point; pseudo-metric space; seventh class contraction type mapping; error estimates