

新三维混沌系统的动力学研究及其应用*

付木亮¹, 张勇¹, 张光云², 舒永录³

(1.河南工业职业技术学院 基础教学部, 河南 南阳 473000; 2.西南石油大学 外国语学院, 成都 610500;
3.重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

摘要: 基于动力系统的基本理论, 对彭建奎等人提出的新混沌系统的一些动力学行为进行了研究。得到了一些如下基本结论: z 轴为该系统的不变集, 系统存在 1 个混沌吸引子, 当系统的参数满足 $ad+bd^2 < ac$ 时系统只有 1 个平衡点, 当系统的参数满足 $ad+bd^2 > ac$ 时系统有 3 个平衡点, 对系统的任意参数 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$,

$\left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right)^2 \leq \frac{[a+(1+b)d]^2}{\min\{1, a, c\} \times (1+b)} \right\}$ 为系统的一个全局吸引集, 该研究结果推广了袁红等人

的研究结果。根据本文得到的全局吸引集结果, 可以得到 $t \rightarrow +\infty$ 时系统各个变量的最终界范围, 然后基于稳定性理论将得到的系统各个变量最终界的范围运用到两个混沌系统的同步研究中, 依据本文所得定理通过设计合适的控制参数实现两个混沌系统的全局渐近同步。最终给出了相应的计算机模拟, 该模拟与理论研究结果相吻合。

关键词: 平衡点; 不变集; 解的有界性; 混沌同步; 混沌控制

中图分类号: O241.84; O29

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2015)03-0000-00

Chaos(混沌)存在于非线性科学领域的很多分支, 如物理学、生物学、化学、电子学、医学、生命科学、神经网络、复杂网络、金融学、经济学、社会学等。很多专著从多个角度来研究混沌系统的性质及其在非线性和科学领域中的应用^[1-9]。

从自然科学的角度来说, 混沌的研究始于 1900 年法国著名数学家庞加莱研究三体的运动规律问题。

混沌系统的发展大致可以分为以下四个阶段^[1]: 第一阶段从 1900 年至 1974 年, 主要的贡献为三体问题、KAM 理论、蝴蝶效应 Lorenz 混沌吸引子的发现、Henon 映射的研究。第二阶段从 1975 到 1989 年, 包括贡献为 Logistic 人口模型的提出、混沌同步理论的提出、Chua 电路的发现。第三阶段从 1990 年至 1999 年, 主要贡献为混沌控制 OGY 方法的实现、混沌系统同步的实现、混沌保密通信的研究、混沌反控制的提出、Chen 系统的提出。第四阶段从 2000 年至今, 随着复杂网络的进一步研究与发展, 从而推动了混沌理论的发展, 主要贡献为复杂网络同步的研究。

20 世纪以来, 非线性系统科学得到了进一步的研究和发展, 自从 Lorenz 混沌系统被发现以来, 更多的研究者致力于其它混沌系统的研究, Rossler 系统、统一混沌系统、超混沌 Rossler 系统、超混沌 Chen 系统等相继被提出和研究^[1]。

本文基于动力系统的基本理论研究了一个新三维混沌系统的基本动力学行为, 并且将有界性结果应用到两个相同混沌系统的同步之中。

1 基本动力学研究

本文研究的一个新混沌系统方程为^[10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + byz \\ \dot{y} = xz - cy \\ \dot{z} = d - xy - z \end{cases} \quad (1)$$

这里 a, b, c, d 为该系统的正参数。当正参数 $a = 3, b = 1/3, c = 1, d = 50$, 且该系统的初值选为

$(x_0, y_0, z_0) = [-0.5, 1.5, 1]$ 时, 系统轨线的相图, 如图 1 所示。

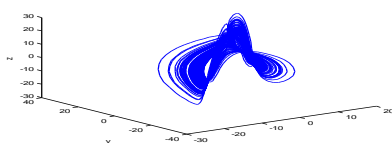


图 1 系统 (1) 轨线的相图

对于系统(1), 有

下面我们研究系统(1)的一些基本的动力学行为。

1.1 不变性

z 轴为系统 (1) 的不变集: 即从 z 轴上任何点出发的轨线都永远只在 z 轴上运动。

1.2 耗散性和吸引子的存在性

* 收稿日期: 修回日期:

资助项目: 国家自然科学基金(No. 10601071).

作者简介: 付木亮,男,讲师,研究方向为大学数学教学.通讯作者:张勇, E-mail:zhangyongzhang2013@163.com

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -a - c - 1,$$

从而系统 (1) 以指数速率 $\frac{dV}{dt} = e^{-(a+c+1)t}$ 收敛, 从而保证了系统 (1) 吸引子的存在性。

1.3 平衡点

对于混沌系统 (1),

1) 当 $ad+bd^2 < ac$, 系统 (1) 只有 1 个平衡点, $P_0 = (0, 0, d)$.

2) 当 $ad+bd^2 > ac$, 系统 (1) 有 3 个平衡点,

$$P_0 = (0, 0, d),$$

$$P_+ = \left(\sqrt{\frac{ad+bd^2-ac}{a+bd}}, \frac{a+bd}{a+bd+bc} \sqrt{\frac{ad+bd^2-ac}{a+bd}}, \frac{ac+bcd}{a+bd+bc} \right),$$

$$P_- = \left(-\sqrt{\frac{ad+bd^2-ac}{a+bd}}, -\frac{a+bd}{a+bd+bc} \sqrt{\frac{ad+bd^2-ac}{a+bd}}, \frac{ac+bcd}{a+bd+bc} \right).$$

1.4 混沌系统的全局指数吸引集

定理 1 对 $\forall a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, 令

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right)^2, \delta = \min\{1, a, c\} > 0, L = \frac{[a + (1+b)d]^2}{\delta(1+b)} > 0.$$

则当 $V(X(t)) \geq L, V(X_0) > L$ ($t \geq t_0$) 时, 对于系统 (1) 有指数估计式

$$[V(X(t)) - L] \leq [V(X_0) - L] e^{-\delta(t-t_0)}.$$

从而

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V(X(t)) \leq L.$$

证明 作

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right)^2,$$

当 $V(X(t)) > L, V(X(t_0)) > L$, 计算 $V(x, y, z)$ 对时间 t 的导数

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} &= 2(1-2a)x\dot{x} + 2(1-2c)y\dot{y} + 2(1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right) \dot{z}, \\ &= 2(1-2a)x\{a(y-x) + byz\} + 2(1-2c)y\{xz - cy\} + 2(1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right) \{d - xy - z\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2ax^2 - 2cy^2 - 2(1+b)z^2 + 2[(1+b)d - a]z + 2ad, \\
 &= -ax^2 - cy^2 - (1+b)z^2 - 2az - ax^2 - cy^2 - (1+b)z^2 + 2(1+b)dz + 2ad, \\
 &= -ax^2 - cy^2 - (1+b)\left(z + \frac{a}{1+b}\right)^2 - ax^2 - cy^2 - (1+b)z^2 + 2(1+b)dz \\
 &\quad + 2ad + \frac{a^2}{1+b}, \\
 &\leq -\partial V + (1+b)d^2 + 2ad + \frac{a^2}{1+b}, \\
 &\leq -\partial V + \frac{[a + (1+b)d]^2}{1+b}, \\
 &= -\partial \left[V - \frac{[a + (1+b)d]^2}{\partial(1+b)} \right] < 0,
 \end{aligned}$$

对上述不等式两边积分有

$$V(X(t)) - L \leq [V(X_0) - L]e^{-\partial(t-t_0)}.$$

取上极限

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V(X(t)) \leq L,$$

即

$$\left\{ (x, y, z) \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} V(X(t)) \leq L \right\} = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (1+b)\left(z + \frac{a}{1+b}\right)^2 \leq L \right\}$$

为系统 (1) 的一个全局指数吸引集。这里

$$L = \frac{[a + (1+b)d]^2}{\partial(1+b)} = \begin{cases} \frac{[a + (1+b)d]^2}{(1+b)}, & 1 \leq a, 1 \leq c, \\ \frac{[a + (1+b)d]^2}{a(1+b)}, & a \leq 1, a \leq c, \\ \frac{[a + (1+b)d]^2}{c(1+b)}, & c \leq 1, c \leq a. \end{cases}$$

证毕

注 文献 [11] 仅仅研究了 $a > \frac{1}{2}, c > \frac{1}{2}, b > 0, d > 0$ 时系统 (1) 的全局吸引集, 本文研究了 $\forall a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ 时的情况, 文献 [11] 的研究结果是本文研究的一个特例。

1.5 混沌系统全局吸引集在同步中的应用

让系统 (1) 为驱动系统, 响应系统定义为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + by_1z_1 - k_1(x_1 - x), \\ \dot{y}_1 = x_1z_1 - cy_1 - k_2(y_1 - y), \\ \dot{z}_1 = d - x_1y_1 - z_1 - k_3(z_1 - z), \end{cases} \quad (2)$$

这里 k_1, k_2, k_3 均为控制正参数, 且只与 a, b, c, d 有关。

定理 2 当

$$k_1 > \frac{a+(1+b)M_3+M_2}{2} - a, k_2 > \frac{a(1+b)M_3+bM_1}{2} - c, k_3 > \frac{M_2+bM_1}{2(1+b)} - c,$$

驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 达到完全同步。

证明 由定理 1 可以知道 $|x| \leq \sqrt{L} = M_1, |y| \leq \sqrt{L} = M_2, |z| \leq \sqrt{\frac{L}{1+b} + \frac{a}{1+b}} = M_3,$

定义误差变量 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z,$ 则驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 + bze_2 + bye_3 + be_2e_3 - (a+k_1)e_1, \\ \dot{e}_2 = -(c+k_2)e_2 + xe_3 + ze_1 + e_1e_3, \\ \dot{e}_3 = -(c+k_3)e_3 - xe_2 - ye_1 - e_1e_2, \end{cases} \quad (3)$$

取正定函数 $V(e_1, e_2, e_3) = e_1^2 + e_2^2 + (1+b)e_3^2,$ 则其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_2, e_3) &= 2e_1\dot{e}_1 + 2e_2\dot{e}_2 + 2(1+b)e_3\dot{e}_3, \\ &= -2(a+k_1)e_1^2 - 2(c+k_2)e_2^2 - 2(1+b)(c+k_3)e_3^2 + (2a+2bz+2z)e_1e_2 \\ &\quad - 2ye_1e_3 - 2bx_2e_3, \\ &\leq -2(a+k_1)e_1^2 - 2(c+k_2)e_2^2 - 2(1+b)(c+k_3)e_3^2 + \{2a+(2b+2)|z|\}|e_1||e_2| \\ &\quad + 2|y||e_1||e_3| + 2b|x||e_2||e_3|, \\ &\leq -2(a+k_1)e_1^2 - 2(c+k_2)e_2^2 - 2(1+b)(c+k_3)e_3^2 + \{2a+(2b+2)M_3\}|e_1||e_2| \\ &\quad + 2M_2|e_1||e_3| + 2bM_1|e_2||e_3|, \\ &\leq -[2(a+k_1)-a-(b+1)M_3]e_1^2 - [2(c+k_2)-a-(b+1)M_3-bM_1]e_2^2 \\ &\quad - [2(1+b)(c+k_3)-M_2-bM_1]e_3^2, \end{aligned}$$

当 $k_1 > \frac{a+(1+b)M_3+M_2}{2} - a, k_2 > \frac{a(1+b)M_3+bM_1}{2} - c, k_3 > \frac{M_2+bM_1}{2(1+b)} - c$ 时, 有

$\dot{V}(e_1, e_2, e_3) < 0,$ 从而系统 (1)、(2) 实现完全同步。

2 数值模拟

选取系统 (1)、(2) 的初值为 (1,1,2)、(2,1.5,3.5), 选取参数 $a=3, b=1/3, c=1, d=50,$ ^[10] 根据定理 1 得到 $\sqrt{L} = M_1 = M_2 = 60.3, \sqrt{\frac{L}{1+b} + \frac{a}{1+b}} = M_3 = 54.5,$ 由定理 1 得到系统(1)的全局吸引集

$$\Delta = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + \frac{4}{3} \left(z + \frac{9}{4} \right)^2 \leq \frac{209^2}{12} \right\},$$

如图 2 所示。 $\frac{a+(1+b)M_3+M_2}{2} - a = 65.2, \frac{a(1+b)M_3+bM_1}{2} - c = 119, \frac{M_2+bM_1}{2(1+b)} - c = 29,$

根据定理的要求选取控制器参数 $k_1 = 66, k_2 = 120, k_3 = 35,$ 系统 (1)、(2) 的同步结果如图 3 所示。

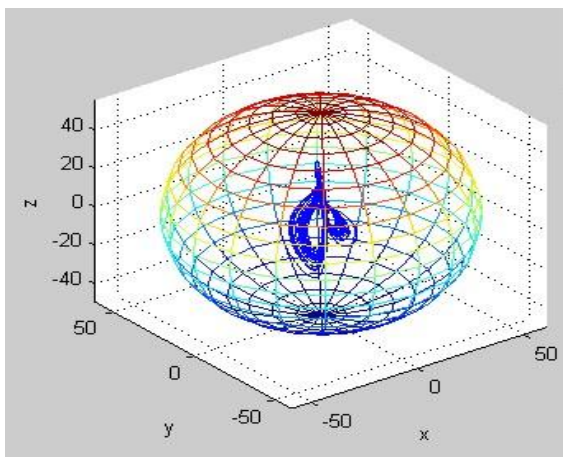


图 2 在上述参数下系统 (1) 的全局吸引集

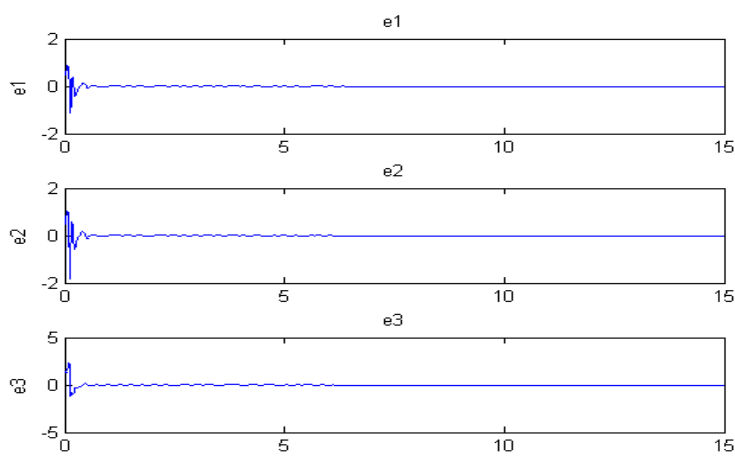


图 3 系统 (1)、(2) 同步效果图示

参考文献:

[1] 闫振亚.复杂非线性波的构造性理论及其应用[M].北京:科学出版社,2002.
 Yan Z Y.The complex nonlinear wave structure theory and its application[M].Beijing:Science Press,2002.
 [2] 王兴元.混沌系统的同步及在保密通信中的应用[M].北京:科学出版社,2011.
 Wang X Y.Chaotic synchronization and its application in secure communication [M].Beijing:Science Press,2011.
 [3] 王兴元,刘明.用滑模控制方法实现具有扇区非线性输入的主从混沌系统同步[J].物理学报,2005,54(6):2854-2859.
 Wang X Y,Liu M.Sliding mode control for the synchronization of mater-slave chaotic systems with sector nonlinear input[J].Acta Physica Sinica,2005,54(6):2854-2859.
 [4] 邱国英,杨德刚.基于终端滑模和自适应反馈方法的一类混沌系统稳定性分析[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2014,31(6):92-96.
 Qiu G Y, Yang D G. Stabilization of a class of chaotic systems based on TSM and AFC[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science, 2014, 31(6): 92-96.
 [5] 罗小华,薛飞,何伦.非自治异结构混沌系统同步及其在保密通信中的应用[J].重庆邮电大学学报:自然科学版,2011,23(3):323-327.
 Luo X,Xue F,He L.Synchronization between two non-autonomous chaotic systems with different configuration and its application in secure communication[J].Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications:Natural Science, 2011,23(3):323-327.
 [6] 王东晓,武大勇.新五维混沌系统的同步研究[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2014, 31(6): 87-91.
 Wang D X, Wu D Y. Research on the synchronization of a novel five-dimensional hyper-chaotic system[J]. Journal of Chongqing

Normal University:Natural Science, 2014, 31(6): 87-91.
 [7] 赵德勤,刘曾荣.基于追踪控制的混沌系统广义同步[J].重庆邮电大学学报:自然科学版,2007,19(6):759-761.
 Zhao D Q,Liu Z R.Generalized synchronization of chaotic system based on tracking control[J].Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications:Natural Science, 2007,19(6):759-761.
 [8] 黄琼,刘翔,周平.一类拓扑不等价混沌系统的同步[J].重庆邮电大学学报:自然科学版,2007,19(2):245-248.
 Huang Q,Liu X,Zhou P.Synchronization for a class of topologically inequivalent chaotic systems[J].Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications:Natural Science,2007,19(2):245-248.
 [9] 朱红兰.一个超混沌系统的最优控制与同步[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(3):65-68.
 Zhu H L. Optimal control and synchronization of a hyperchaotic system[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30 (3) : 65-68.
 [10] 彭建奎,俞建宁,王振乾,等.一个新混沌系统的混沌分析及电路仿真[J].河北师范大学学报:自然科学版.2010,34(6):656-663.
 Peng J K,Yu J N,Wang Z Q,et al.Chaotic analysis and circuit simulation for a novel chaotic system[J].Journal of Hebei Normal University:Natural Science,2010,34(6):656-663.
 [11] 袁红,张付臣.新混沌系统的全局指数吸引集及其数值模拟[J].计算机工程与应用,2012,48(11):37-39.
 Yuan H,Zhang F C.Globally exponentially attractive set of new chaotic system and its numerical simulation[J].Computer Engineering and Applications,2012,48(11):37-39.

Dynamical Behaviors of a New 3D Chaotic System and Its Application

FU Muliang¹, ZHANG Yong¹, ZHANG Guangyun², SHU Yonglu³

(1. Department of basic teaching, Henan Polytechnic Institute, Nanyang Henan 473000;

2. School of Foreign Languages, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500;

3. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331)

Abstract: Based on the theory of dynamical systems, we have studied some dynamical behavior of a new chaotic system proposed by Peng et al. We obtain the following conclusions about the new chaotic system: z axis is the invariant set of the system, the new chaotic system has a chaotic attractor, the chaotic system has only one equilibrium point when $ad+bd^2 < ac$, the chaotic system has three

equilibrium points when $ad+bd^2 > ac$, $\left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (1+b) \left(z + \frac{a}{1+b} \right)^2 \leq \frac{[a + (1+b)d]^2}{\min\{1, a, c\} \times (1+b)} \right\}$ is the global attractive set of

the chaotic system for $\forall a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. The global attractive sets presented in this article contain Yuan Hong's result as special cases. Base on the global attractive sets obtained in this paper, we can get the boundedness of all variables of the system when

$t \rightarrow +\infty$. Then the boundedness of all variables of the system is used to study chaotic synchronization of two chaotic systems based on stability theory of dynamical systems. Two chaotic systems are global asymptotic synchronization by designing the proper controller according to the theory obtained in the paper. Finally, we give the simulations about our results in the paper. Numerical simulations is consistent with our computation.

Keywords: equilibrium points; invariant sets; boundedness of solutions; chaos synchronization; chaos control