DOI:10.11721/cqnuj20150413

一致凸 Banach 空间中 α-非扩张映象的强收敛定理*

谭 军,向长合
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:设 C 是一致凸 Banach 空间中的非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是具有不动点的半紧 α-非扩张映象,其中 $\alpha<1$。任取一点 $x_0\in C$,$\{x_n\}$是由 $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\beta_n u_n$, $y_n=(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_n Tx_n+\delta_n v_n$,$n=0,1,2,\cdots$ 定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列,其中 $0<A\leqslant\alpha_n\leqslant B<\frac{1}{2}$,$0\leqslant\gamma_n\leqslant\gamma<1$,$n=0,1,2,\cdots$,$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$,$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$,$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是 C 中的有界点列。本文证明了$\{x_n\}$强收敛于 T 的某一不动点。

关键词:不动点;α-非扩张映象;半紧;一致凸 Banach 空间;Ishikawa 迭代序列

中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2015)04-0074-04

众所周知,非扩张映象是一类非常重要的非线性映象。1965 年,Browder 在文献[1]中证明了一致凸 Banach 空间中的非空有界闭凸子集上的非扩张自映象一定存在不动点。近 20 年来,人们在不同空间中对非扩张映象不动点的各种迭代逼近进行了研究,得到了大量的收敛性定理[2-4]。

2011 年,Aoyama 和 Kohsaka 在文献[5]中引入了 α-非扩张映象,并在一致凸 Banach 空间中建立了 α-非扩张映象不动点的存在性定理。由于 α-非扩张映象是对非扩张映象的真推广,因此该定理是对文献[1]中结果的真推广。但是,关于 α-非扩张映象不动点的迭代收敛性定理,目前尚未见任何结果。

下面在一致凸 Banach 空间中对迭代参数的适当限制条件下,证明带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛于具有不动点的半紧 α-非扩张映象的某一不动点。

1 预备知识

定义 1[2] 设 E 是 Banach 空间,称 E 是一致凸的,若任给 $\varepsilon\in(0,2]$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,对于任何 $x,y\in E$,当$\|x\|\leqslant1$,$\|y\|\leqslant1$ 且$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时,有$\|x+y\|\leqslant2-\delta$。

定义 2[5] 设 E 是 Banach 空间,C 是 E 中的非空子集,α 是实数并且 $\alpha<1$。称映象 $T:C\to E$ 为 α-非扩张映象,如果满足

$$\|Tx-Ty\|^2\leqslant\alpha\|Tx-y\|^2+\alpha\|x-Ty\|^2+(1-2\alpha)\|x-y\|^2,\ \forall\, x,y\in C。\tag{1}$$

显然,非扩张映象是 0-非扩张映象,文献[5]中的实例显示 α-非扩张映象不一定连续,从而 α-非扩张映象是非扩张映象的真推广。

定理 1[5] 设 E 是一致凸 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T:C\to C$ 为 α-非扩张映象,$\alpha<1$。那么,T 的不动点集 $F(T)$非空当且仅当存在 $x\in C$,使得$\{T^n x\}$有界。

定义 3[6] 设 C 是实 Banach 空间 E 中的非空凸子集,T 是从 C 到 C 的映象,$x_0\in C$,$\{x_n\}$是由:

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\beta_n u_n,\\ y_n=(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_n Tx_n+\delta_n v_n,n\geqslant0。\end{cases}\tag{2}$$

定义的迭代序列,其中$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是 C 中的有界点列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}\subset[0,1]$并满足

$$\alpha_n+\beta_n\leqslant1,\gamma_n+\delta_n\leqslant1,n=0,1,2,\cdots\tag{3}$$

则$\{x_n\}$称为带误差的 Ishikawa 迭代序列。特别地,若 $\beta_n=\delta_n=0(n\geqslant0)$,则$\{x_n\}$称为 Ishikawa 迭代序列,若 $\beta_n=\gamma_n=\delta_n=0(n\geqslant0)$,则$\{x_n\}$称为 Mann 迭代序列。

引理 1 设 E 是 Banach 空间,C 是 E 中的非空凸子集,$T:C\to C$ 是不动点集 $F(T)$非空的 α-非扩张映象,其

* **收稿日期**:2014-06-08 **修回日期**:2015-02-13 **网络出版时间**:2015-3-24 13:53

资助项目:国家自然科学基金(No.11171363)

作者简介:谭军,男,研究方向为不动点理论及其应用,E-mail:595131391@163.com;**通信作者**:向长合,副教授,E-mail:xch@cqnu.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.028.html

中 $\alpha<1$。任取一点 $x_0\in C$，$\{x_n\}$是由(2)式定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$，则$\{x_n\}$有界。

证明　由于 $F(T)$非空，任取 $q\in F(T)$，对所有 $z\in C$，由(1)式，得

$$\|Tz-q\|^2=\|Tz-Tq\|^2\leqslant\alpha\|Tz-q\|^2+\alpha\|q-z\|^2+(1-2\alpha)\|z-q\|^2,$$

即$(1-\alpha)\|Tz-q\|^2\leqslant(1-\alpha)\|z-q\|^2$。由 $\alpha<1$，得：

$$\|Tz-q\|\leqslant\|z-q\|,\forall q\in F(T),\forall z\in C,\tag{4}$$

由(2)、(3)和(4)式，对任给的 $n=0,1,2,\cdots$，有：

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|&=\|(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_nTy_n+\beta_nu_n-q\|=\|(1-\alpha_n-\beta_n)(x_n-q)+\alpha_n(Ty_n-q)+\beta_n(u_n-q)\|\leqslant\\&(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-q\|+\alpha_n\|Ty_n-q\|+\beta_n\|u_n-q\|\leqslant(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-q\|+\alpha_n\|y_n-q\|+\beta_n\|u_n-q\|,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|&=\|(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_nTx_n+\delta_nv_n-q\|=\|(1-\gamma_n-\delta_n)(x_n-q)+\gamma_n(Tx_n-q)+\delta_n(v_n-q)\|\leqslant\\&(1-\gamma_n-\delta_n)\|x_n-q\|+\gamma_n\|Tx_n-q\|+\delta_n\|v_n-q\|\leqslant\\&(1-\gamma_n-\delta_n)\|x_n-q\|+\gamma_n\|x_n-q\|+\delta_n\|v_n-q\|=(1-\delta_n)\|x_n-q\|+\delta_n\|v_n-q\|,\end{aligned}\tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|&\leqslant(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-q\|+\alpha_n[(1-\delta_n)\|x_n-q\|+\delta_n\|v_n-q\|]+\beta_n\|u_n-q\|=\\&(1-\beta_n-\alpha_n\delta_n)\|x_n-q\|+\alpha_n\delta_n\|v_n-q\|+\beta_n\|u_n-q\|\leqslant\|x_n-q\|+m_n,n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$m_n=\delta_nv_n-q+\beta_nu_n-q,n=0,1,2,\cdots,\tag{8}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$，且$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是 C 中的有界点列，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}m_n<\infty,\tag{9}$$

由(7)、(9)式，对任给的 $n=0,1,2,\cdots$，有 $\|x_{n+1}-q\|\leqslant\|x_0-q\|+m_0+m_1+\cdots+m_n\leqslant\|x_0-q\|+\sum\limits_{k=0}^{\infty}m_k<\infty$，从而$\{x_n\}$有界。　　证毕

定义 4[7]　设 C 是 Banach 空间的闭子集，映象 $T:C\to C$ 称为半紧的。如果对 C 中的满足$\|x_n-Tx_n\|\to0$ $(n\to\infty)$的有界点列$\{x_n\}$，均存在强收敛的子列。

2 主要结果

定理 2　设 E 是一致凸 Banach 空间，C 是 E 中的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是不动点集 $F(T)$非空的半紧 α-非扩张映象，其中 $\alpha<1$。任取一点 $x_0\in C$，$\{x_n\}$是由(2)式定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列，其中 $0<A\leqslant\alpha_n\leqslant B<\frac{1}{2}$，$0\leqslant\gamma_n\leqslant\gamma<1$，$n=0,1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$，则$\{x_n\}$强收敛于 T 的某一不动点。

证明　首先，证明

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Ty_n\|=0,\tag{10}$$

若不然，则存在子列$\{n_k\}$及常数 $\varepsilon_0>0$，使得

$$\|x_{n_k}-Ty_{n_k}\|\geqslant\varepsilon_0,k=1,2,\cdots,\tag{11}$$

由于 $F(T)$非空，任取 $q\in F(T)$，由(2)、(3)和(4)式，得

$$\begin{aligned}\|x_{n_k}-Ty_{n_k}\|&\leqslant\|x_{n_k}-q\|+\|Ty_{n_k}-q\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|+\|y_{n_k}-q\|=\|x_{n_k}-q\|+\|(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})x_{n_k}+\gamma_{n_k}Tx_{n_k}+\delta_{n_k}v_{n_k}-q\|=\\&\|x_{n_k}-q\|+\|(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})(x_{n_k}-q)+\gamma_{n_k}(Tx_{n_k}-q)+\delta_{n_k}(v_{n_k}-q)\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|+(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\\&\gamma_{n_k}\|Tx_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|+(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\gamma_{n_k}\|x_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|=\\&(2-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|\leqslant2\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k},k=1,2,\cdots\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $w_{n_k}=\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|$。由于$\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$有界，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_{n_k}<\infty$，从而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}w_{n_k}<\infty$，$\lim\limits_{k\to\infty}w_{n_k}=0$，存在正整数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，$w_{n_k}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_0$。由(11)、(12)式，当 $k\geqslant k_0$ 时，有

$$\|x_{n_k}-q\|\geqslant\frac{1}{2}(\|Ty_{n_k}-x_{n_k}\|-w_{n_k})\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon_0=\varepsilon_1>0,\tag{13}$$

再由(1)、(3)和(4)式，得

$$\|Ty_{n_k}-q\|\leqslant\|y_{n_k}-q\|=\|(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})x_{n_k}+\gamma_{n_k}Tx_{n_k}+\delta_{n_k}v_{n_k}-q\|=$$
$$\|(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})(x_{n_k}-q)+\gamma_{n_k}(Tx_{n_k}-q)+\delta_{n_k}(v_{n_k}-q)\|\leqslant(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\gamma_{n_k}\|Tx_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|\leqslant$$
$$(1-\gamma_{n_k}-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\gamma_{n_k}\|x_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|=(1-\delta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k},$$

从而,有$\left\|\frac{x_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}\right\|\leqslant1,\left\|\frac{Ty_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}\right\|\leqslant1$,$k=1,2,\cdots$,由定义 3 和引理 1,$\{v_n\}$和$\{x_n\}$有界,存在常数$M>0$,使得$\|x_{n_k}-q\|+\|w_{n_k}\|=\|x_{n_k}-q\|+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|+\|v_{n_k}-q\|\leqslant M$,$k=1,2,\cdots$,由此及(11)式,得

$$\left\|\frac{x_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}-\frac{Ty_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}\right\|=\frac{\|x_{n_k}-Ty_{n_k}\|}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{M},k=1,2,\cdots。$$

由于 E 是一致凸 Banach 空间,由定义 1,存在 $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon_0}{M}\right)>0$,使得$\left\|\frac{Ty_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}+\frac{x_{n_k}-q}{\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k}}\right\|\leqslant2-\delta,k=1,2,\cdots$,即

$$\|(Ty_{n_k}-q)+(x_{n_k}-q)\|\leqslant(\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k})(2-\delta),k=1,2,\cdots,\tag{14}$$

由于 $\alpha_{n_k}\leqslant B<\frac{1}{2}$且$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_{n_k}=0$,存在正整数 $k_1\geqslant k_0$,当 $k\geqslant k_1$ 时,有 $2\alpha_{n_k}+\beta_{n_k}\leqslant2B+\beta_{n_k}\leqslant1$,由此及(2)式,当 $k\geqslant k_1$ 时,有

$$\|x_{n_k+1}-q\|=\|(1-\alpha_{n_k}-\beta_{n_k})x_{n_k}+\alpha_{n_k}Ty_{n_k}+\beta_{n_k}u_{n_k}-q\|=$$
$$\|(1-2\alpha_{n_k}-\beta_{n_k})(x_{n_k}-q)+\alpha_{n_k}(Ty_{n_k}-q)+\alpha_{n_k}(x_{n_k}-q)+\beta_{n_k}(u_{n_k}-q)\|\leqslant$$
$$(1-2\alpha_{n_k}-\beta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\alpha_{n_k}\|(Ty_{n_k}-q)+(x_{n_k}-q)\|+\beta_{n_k}\|u_{n_k}-q\|,$$

将(14)式代入上式,并注意到 $0<A\leqslant\alpha_{n_k}\leqslant B<\frac{1}{2}$及(8)式和(13)式,当 $k\geqslant k_1$ 时,有

$$\|x_{n_k+1}-q\|\leqslant(1-2\alpha_{n_k}-\beta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|+\alpha_{n_k}(\|x_{n_k}-q\|+w_{n_k})(2-\delta)+\beta_{n_k}\|u_{n_k}-q\|\leqslant$$
$$(1-\beta_{n_k})\|x_{n_k}-q\|-\delta\alpha_{n_k}\|x_{n_k}-q\|+2\alpha_{n_k}w_{n_k}+\beta_{n_k}\|u_{n_k}-q\|\leqslant$$
$$\|x_{n_k}-q\|-\delta A\varepsilon_1+\delta_{n_k}\|v_{n_k}-q\|+\beta_{n_k}\|u_{n_k}-q\|=\|x_{n_k}-q\|-\delta A\varepsilon_1+m_{n_k},\tag{15}$$

由(15)和(7)式,当 $k\geqslant k_1$ 时,有

$$\|x_{n_k+1}-q\|\leqslant\|x_{n_k}-q\|-\delta A\varepsilon_1+m_{n_k}\leqslant\|x_{n_k-1}-q\|+m_{n_k-1}-\delta A\varepsilon_1+m_{n_k}\leqslant\cdots\leqslant$$
$$\|x_{n_{k-1}+1}-q\|+m_{n_{k-1}+1}+m_{n_{k-1}+2}+\cdots+m_{n_k-1}-\delta A\varepsilon_1+m_{n_k}\leqslant$$
$$\|x_{n_{k-1}}-q\|-2\delta A\varepsilon_1+m_{n_{k-1}}+m_{n_{k-1}+1}+\cdots+m_{n_k}\leqslant\|x_{n_{k-2}}-q\|-3\delta A\varepsilon_1+m_{n_{k-2}}+m_{n_{k-2}+1}+\cdots+m_{n_k}\leqslant\cdots\leqslant$$
$$\|x_{n_{k_1}}-q\|-(k-k_1+1)\delta A\varepsilon_1+\sum_{n=n_{k_1}}^{n_k}m_n\leqslant\|x_{n_{k_1}}-q\|-(k-k_1+1)\delta A\varepsilon_1+\sum_{n=n_{k_1}}^{\infty}m_n,$$

由此及(9)式,当 k 充分大时,有$\|x_{n_k+1}-q\|<0$,矛盾。从而(10)式成立。

然后,证明

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0。\tag{16}$$

由于$\|x_n-Tx_n\|=\|x_n-Ty_n+Ty_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-Ty_n\|+\|Ty_n-Tx_n\|$,由(1)、(2)式,得

$$(\|x_n-Tx_n\|-\|x_n-Ty_n\|)^2\leqslant\|Ty_n-Tx_n\|^2\leqslant\alpha\|y_n-Tx_n\|^2+\alpha\|x_n-Ty_n\|^2+(1-2\alpha)\|y_n-x_n\|^2=$$
$$\alpha\|(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_nTx_n+\delta_nv_n-Tx_n\|^2+\alpha\|x_n-Ty_n\|^2+(1-2\alpha)\|(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_nTx_n+\delta_nv_n-x_n\|^2=$$
$$\alpha\|(1-\gamma_n)(x_n-Tx_n)-\delta_n(x_n-v_n)\|^2+\alpha\|x_n-Ty_n\|^2+(1-2\alpha)\|\gamma_n(Tx_n-x_n)+\delta_n(v_n-x_n)\|^2,$$

将上式左边展开,右边利用三角不等式放大并整理,得

$$\|x_n-Tx_n\|^2-2\|x_n-Tx_n\|\cdot\|x_n-Ty_n\|+\|x_n-Ty_n\|^2\leqslant[\alpha(1-\gamma_n)^2+(1-2\alpha)\gamma_n^2]\|x_n-Tx_n\|^2+\alpha\|x_n-Ty_n\|^2+$$
$$2[\alpha+(1-3\alpha)\gamma_n]\delta_n\|x_n-Tx_n\|\cdot\|v_n-x_n\|+(1-\alpha)\delta_n^2\|v_n-x_n\|^2,$$

移项并整理,有

$$\{1-\alpha+\gamma_n[2\alpha-(1-\alpha)\gamma_n]\}\|x_n-Tx_n\|^2\leqslant2\|x_n-Tx_n\|\cdot\|x_n-Ty_n\|+$$
$$(\alpha-1)\|x_n-Ty_n\|^2+(1-\alpha)\delta_n^2\|v_n-x_n\|^2+2[\alpha+(1-3\alpha)\gamma_n]\delta_n\|x_n-Tx_n\|\cdot\|v_n-x_n\|,\tag{17}$$

由于$\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-q\|+\|q-Tx_n\|\leqslant2\|x_n-q\|$,由引理 1,$\{x_n\}$有界,从而$\{x_n-Tx_n\}$有界,即存在常数$M_1>0$,任给正整数 n,有$\|x_n-Tx_n\|\leqslant M_1$。注意到 $0\leqslant\gamma_n\leqslant\gamma<1$,从而

$$1-\alpha+\gamma_n[2\alpha-(1-\alpha)\gamma_n]=(1-\alpha)(1-\gamma_n^2)+2\alpha\gamma_n\geqslant(1-\alpha)(1-\gamma^2)>0。$$

由(17)式,得

$$(1-\alpha)(1-\gamma^2)\|x_n-Tx_n\|^2\leqslant$$
$$2M_1\cdot\|x_n-Ty_n\|+(\alpha-1)\|x_n-Ty_n\|^2+(1-\alpha)\delta_n^2\|v_n-x_n\|^2+2[\alpha+(1-3\alpha)\gamma_n]\delta_nM_1\cdot\|v_n-x_n\|。$$

由于$\{x_n\}$和$\{v_n\}$有界,再结合(10)式及$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$,得$(1-\alpha)(1-\gamma^2)\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|^2\leqslant0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$,从

而(16)式成立。

由于 T 半紧,$\{x_n\}$ 有界并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$,根据定义 4,$\{x_n\}$ 有强收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$,设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=q$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}Tx_{n_k}=q$,下面证明 q 是 T 的不动点。

$$\|q-Tq\|^2\leqslant(\|q-Tx_{n_k}\|+\|Tx_{n_k}-Tq\|)^2=\|q-Tx_{n_k}\|^2+2\|q-Tx_{n_k}\|\cdot\|Tx_{n_k}-Tq\|+\|Tx_{n_k}-Tq\|^2\leqslant$$
$$\|q-Tx_{n_k}\|^2+2q-Tx_{n_k}\|\cdot\|Tx_{n_k}-Tq\|+\alpha\|Tx_{n_k}-q\|^2+\alpha\|x_{n_k}-Tq\|^2+(1-2\alpha)\|x_{n_k}-q\|^2,$$

让 $k\to\infty$,在上式两端取极限,得 $\|q-Tq\|^2\leqslant\alpha\|q-Tq\|^2$。由于 $\alpha<1$,从而,$q=Tq$,即 q 是 T 的不动点。

最后,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=q$。由(9)式及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=q$,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得 $\|x_N-q\|<\frac{1}{2}\varepsilon$,且 $\sum\limits_{i=N}^{\infty}m_i<\frac{\varepsilon}{2}$,由(7)式,当 $n>N$ 时,有 $\|x_n-q\|\leqslant\|x_{n-1}-q\|+m_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\|x_N-q\|+\sum\limits_{i=N}^{\infty}m_i<\varepsilon$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-q\|=0$。 证毕

定理 3 设 E 是一致凸 Banach 空间,C 是 E 中的非空有界闭凸子集,$T:C\to C$ 是半紧 α-非扩张映象,其中 $\alpha<1$。任取一点 $x_0\in C$,$\{x_n\}$ 是由(2)式定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列,其中 $0<A\leqslant\alpha_n\leqslant B<\frac{1}{2}$,$0\leqslant\gamma_n\leqslant\gamma<1$,$n=0,1,2,\cdots$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的某一不动点。

证明 由于 C 非空有界,由定理 1,T 的不动点集 $F(T)$ 非空。由定理 2 知定理 3 成立。 证毕

注 由于 Ishikawa 迭代序列和 Mann 迭代序列都是带误差的 Ishikawa 迭代序列的特例,因此,本文的结果对 Ishikawa 迭代序列和 Mann 迭代序列都是成立的。

参考文献:

[1] Browder F E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1965, 54: 1041-1044.

[2] Takahashi W, Shimoji K. Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2000, 32: 1463-1471.

[3] 王学武. 一致凸 Banach 空间非扩张映象带误差的 Ishikawa 型的三重迭代序列的收敛性[J]. 大学数学, 2007, 23(1): 56-60.
Wang X W. The convergence theorem of the errors for nonexpansive mappings in triple Ishikawa Iterative with a uniformly convex banach spaces[J]. College Mathematics, 2007, 23(1): 56-60.

[4] 向长合. 一致凸 Banach 空间上有限个非扩张映象的隐式迭代过程[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2006, 3(2): 5-7.
Xiang C H. An implicit iterative process for a finite family of nonexpansive mappings in uniformly convex Banach space[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2006, 23(2): 5-7.

[5] Aoyama K, Kohsaka F. Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in banach spaces[J]. Nonliner Anal, 2011, 74: 4387-4391.

[6] Xu Y G. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operator equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224: 91-101.

[7] Chang S S, Cho Y J, Zhou H Y. Demi-closed principle and weak convergence problems for asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Korean Math Soc, 2001, 38: 1245-1260.

Strong Convergence Theorems for α-nonexpansive Mapping in Uniformly Convex Banach Spaces

TAN Jun, XIANG Changhe

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex Banach space, and let $T:C\to C$ be a semi-compact α-nonexpansive mapping with fixed points, where $\alpha<1$. For given $x_0\geqslant C$, suppose that the sequence $\{x_n\}$ is the Ishikawa iterative sequence with errors defined by $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_nTy_n+\beta_nu_n$, $y_n=(1-\gamma_n-\delta_n)x_n+\gamma_nTx_n+\delta_nv_n$, $n=0,1,2,\cdots$, where $0<A\leqslant\alpha_n\leqslant B<\frac{1}{2}$, $0\leqslant\gamma_n\leqslant\gamma<1$, $n=0,1,2,\cdots$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n<\infty$, $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ are two bounded sequences in C. It is proved that the sequence $\{x_n\}$ strongly converges to a fixed point of T.

Key words: fixed point; α-nonexpansive mapping; semi-compact; uniformly convex Banach space; Ishikawa iterative sequence

(责任编辑 黄 颖)