DOI:10.11721/cqnuj20150411

一般多粒度模糊粗糙集模型*

孙文鑫[1]，刘玉锋[2]

(1. 重庆水利电力职业技术学院 基础部，重庆 永川 402160；2. 重庆大学 城市科技学院，重庆 永川 402160)

摘要：通过分析多粒度和模糊粗糙集之间的联系，建立了一般多粒度模糊粗糙集模型。首先，通过定义等价信息系统下的支撑函数分别给出了等价信息系统下的一般多粒度模糊粗糙下近似算子和一般多粒度模糊粗糙上近似算子的定义；其次，为了更好的分析各算子的特性，还讨论了等价信息系统下一般多粒度模糊粗糙下、上近似算子的性质。另外，经过深入探讨分析等价信息系统下一般多粒度模糊粗糙下、上近似算子之间的关系，研究了一般多粒度模糊粗糙集模型粗糙度和精确度的定义及其性质。最后用淘宝购物这一实例更好地说明了一般多粒度模糊粗糙集模型的实际应用价值。

关键词：粗糙集；多粒度；模糊集；等价信息系统

中图分类号：O159；TP183　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)04-0103-07

处理不确定性问题的粗糙集理论[1]是由波兰数学家 Pawlak 提出的。目前，该理论已成功应用在了人工智能、数据挖掘、医疗诊断、模式识别等[2-3]方面。近年来，粗糙集理论已引起了众多学者的研究兴趣，其模型推广也成为目前研究的热点之一[4]。

众所周知，Pawlak 提出的粗糙集模型是通过定义两个近似算子对经典集合进行刻画的过程。而美国控制论专家 Zadeh 提出的模糊集理论[5]是对生活中的模糊现象进行的一种刻画过程。因此如何将两种处理不确定性问题的理论结合起来也成为了近年来研究的另一个热题。1990 年，Dubois 和 Prade 提出了模糊粗糙集[6]和模糊粗糙集模型[7]，为两种理论的结合打开了一扇崭新的大门。此后，模糊粗糙集的推广也受到了研究者们的重视，如：将模糊粗糙集模型推广到了直觉模糊环境中[8]、区间值直觉模糊环境[4]等等。目前，模糊粗糙集已经成功地运用在了网站分类、神经网络、医学时间序列、股票价格等方面。

此外，粒计算[9]也是近几年发展起来的一门新学科。粒计算的概念[10]是由 Zadeh 教授在 1979 年提出来的，之后在 1985 年国际人工智能联合会议上 Hobbs[11]也用粒度作为论文题目进行了论述。随着时间的流逝，粒计算的研究在国际学术上受到了众多研究者的关注，越来越多的研究成果登上了学术舞台[12-15]。多粒度粗糙集模型最初是由钱宇华教授在 2010 年提出来的，他通过分析粗糙集和粒计算中粒度的关系，将粗糙集中的等价类用粒计算中的粒度进行刻画，并把粒计算中的多粒度引入粗糙集中建立了乐观和悲观的多粒度粗糙集模型[16]。之后，国内的研究者便在此基础上将其定义的多粒度粗糙集进行了推广研究[17-21]。

本文通过分析前人的研究成果[16-20]，发现他们的研究成果仅考虑了所有粒度(至少一个)一定属于刻画的概念和所有粒度(至少一个)可能属于被刻画的概念这几种情况。然而，在实际生活应用中还存在着某些粒度一定属于刻画的概念和某些粒度可能属于被刻画的概念这两种情况，因此本文将这两种情况引入到了粗糙集和模糊集理论中，建立一般多粒度模糊粗糙集模型。文章的主要结构内容包括：为了更好地介绍本文的研究成果，在文章的第 2 部分介绍了一些相关的定义和定理；在文章的第 3 部分，通过定义等价信息系统中的支撑函数，给出了一般多粒度模糊粗糙集模型下、上近似算子的定义，建立了一般多粒度模糊粗糙集模型，并讨论了各近似算子的性质；第 4 部分，给出了一般多粒度模糊粗糙集模型粗糙度和精确度的定义和性质；在文章的第 5 部分，为了增强模型的实用性，用淘宝购物这一实例说明了模型的实际应用价值。最后，在文章的第 6 部分对本文进行了总结。

1 基于等价信息系统的多粒度模糊粗糙集模型

定义 1　称 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 为一个信息系统，其中称 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为论域，是由 n 个对象构成的集

---

* 收稿日期：2014-02-26　　修回日期：2015-02-20　　网络出版时间：2015-3-24 13:53

作者简介：孙文鑫，女，助教，研究方向为粗糙集和模糊集，E-mail：sunxuxin520@163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.030.html

合，称 $AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为属性集是由 m 个属性构成的集合；$V=\bigcup_{\alpha\in AT}V_a$ 且 V_a 是属性 a 的值域，$f:U\times AT\rightarrow V$ 是一个函数，对任意的 $\alpha\in AT,u\in U$，有 $f(u,a)\in V_a$ 称为信息函数。

定义 2 称 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 为一个等价信息系统，如果对任意的 $A\subseteq AT$，有

$$R_A=\{(x,y)\mid f(a,x)=f(a,y),\forall a\in A\},$$

显然 R_A 满足自反性、对称性和传递性，即 R_A 是等价关系。

记 $[x]_A=\{y\mid(x,y)\in R_A\}$，$U/A=\{[x]_A,x\in U\}$；称 $[x]_A$ 为 x 的等价类或粒度，称 U/A 为等价类构成的集合。

定义 3 设 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 为一个等价信息系统，对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT(m\leqslant 2^{|AT|})$，等价关系 R_{A_1}，$R_{A_2},\cdots,R_{A_m}$。对于 $\forall X\in F(U)$，定义算子 $\underline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}$ 和 $\overline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}$ 如下：

$$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\bigvee_{i=1}^m\{\wedge X(y)\mid y\in[x]_{A_i}\};\overline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\bigwedge_{i=1}^m\{\vee X(y)\mid y\in[x]_{A_i}\}。$$

若 $\underline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\neq\overline{OM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)$，则 X 可称作 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 下的乐观多粒度模糊粗糙集，否则 X 称作 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 下的乐观多粒度模糊可定义集。

定义 4 设 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 为一个等价信息系统，对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT\ (m\leqslant 2^{|AT|})$，等价关系 R_{A_1}，$R_{A_2},\cdots,R_{A_m}$。对于 $\forall\ X\in F(U)$，定义算子 $\underline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}$ 和 $\overline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}$ 如下：

$$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\bigwedge_{i=1}^m\{\wedge X(y)\mid y\in[x]_{A_i}\};\overline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\bigvee_{i=1}^m\{\vee X(y)\mid y\in[x]_{A_i}\}。$$

若 $\underline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\neq\overline{PM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)$，则 X 称作 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 下的悲观多粒度模糊粗糙集，否则 X 称作 $\mathcal{I}=(U,AT,V,f)$ 下的悲观多粒度模糊可定义集。

2 基于等价信息系统的一般多粒度模糊粗糙集模型

定义 5 设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统，对于任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，$x_i\in U$，定义 $S_{x_i}^{A_i}(y)=\begin{cases}1,y\in[x_i]_{A_i}\\0,\text{否则}\end{cases}$。称 $S_{x_i}^{A_i}(y)$ 为元素 y 在属性集 A_i 下对 x_i 的支撑函数。

定义 6 设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统，对于任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，$X\in F(U)$，$\beta\in(0.5,1]$，定义 X 基于 $I=(U,AT,f)$ 的一般多粒度模糊下、上近似分别为：

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\left\{\wedge X(y)\,\middle|\,\frac{\sum_{i=1}^m S_{x\,i}^{A}(y)}{m}\geqslant\beta\right\};\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\left\{\vee X(y)\,\middle|\,\frac{\sum_{i=1}^m S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right\}。$$

其中"$\wedge$"表示取小；"$\vee$"表示取大。如果对于任意的 $x\in U$，有 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)(x)$，则 X 为 $I=(U,AT,f)$ 下的一般多粒度模糊可定义集，否则 X 是 $I=(U,AT,f)$ 下的一般多粒度模糊粗糙集。

性质 1 设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统，对于任意的 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，$X,Y\in F(U)$，$\beta\in(0.5,1]$，有以下性质成立：1) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(\sim X)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)$，$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A^i}(\sim x)=\sim\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)$；2) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\subseteq X$，$X\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)$；3) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m Ai}(\varnothing)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(\varnothing)=\varnothing$，$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(U)=\overline{GM}_{\sum_{i=1}^m A_i}(U)=U$；4) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X\cap Y)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\cap\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$，$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X\cup Y)\supseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A^i}(X)\cup\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$；5) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X\cup Y)\supseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\cup\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$，$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X\cap Y)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\cap\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$；6) $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m Ai}(X)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$，$X\subseteq Y\Rightarrow\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(X)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^m A_i}(Y)$。

证明　1）对于任意的 $x\in U$，有

$$\sim\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)=1-\left\{\vee X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\left\{\wedge (1\text{-}X(y))\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\sim X)(x)。$$

同理可证得式子$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\sim\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$成立。

2）对任意的 $x\in U$，$A_i\subseteq AT$，有 $x\in[x]_{A_i}$，故$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)=\left\{\wedge X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\leqslant X(x)$，因此有式子$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq X$ 成立。根据性质 1）可直接证得 $X\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$成立 。

3）由性质 2)可得 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\varnothing)\subseteq\varnothing$ 和 $U\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(U)$成立；又因 $\varnothing\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\varnothing)$和$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(U)\subseteq U$ 成立，故$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\varnothing)=\varnothing$ 和$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(U)=U$ 成立。根据性质 1）可证$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\varnothing)=\varnothing$ 和$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(U)=U$ 成立。

4）对于任意的 $x\in U$，$A_i\subseteq AT$，有 $X\cap Y(x)=\min\{X(x),Y(x)\}$，故有：

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cap Y)(x)=\left\{\wedge\{X(y)\wedge Y(y)\}\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\leqslant\left\{\wedge X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x),$$

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cap Y)(x)=\left\{\wedge\{X(y)\wedge Y(y)\}\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\leqslant\left\{\wedge Y(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta m}_{\sum A_i}(Y)(x)。$$

即$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cap Y)(x)\leqslant\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)\wedge\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)(x)$，故$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cap Y)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\cap\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$成立。根据性质 1）可证得性质$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cup Y)\supseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\cup\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$成立。

5）对于任意的 $x\in U$，$A_i\subseteq AT$，有 $X\cup Y(x)=\max\{X(x),Y(x)\}$，故有：

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cup Y)(x)=\left\{\wedge\{X(y)\vee Y(y)\}\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\geqslant\left\{\wedge X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x),$$

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cup Y)(x)=\left\{\wedge\{X(y)\vee Y(y)\}\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\geqslant\left\{\wedge Y(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)(x)。$$

因此$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cup Y)(x)\geqslant\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)\vee\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)(x)$，故有$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cup Y)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\cup\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$成立。根据性质 1）可证得性质$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X\cap Y)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\cap\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$成立。

6）因为对于任意的 $x\in U$，$A_i\subseteq AT$，有 $X(x)\subseteq Y(x)$，则：

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)=\left\{\wedge X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\leqslant\left\{\wedge Y(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)(x),$$

$$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)(x)=\left\{\vee X(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}\leqslant\left\{\vee Y(y)\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}S_x^{A_i}(y)}{m}\geqslant\beta\right.\right\}=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)(x)。$$

因此若 $X\subseteq Y$，则式子$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$和$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(Y)$成立。

定理 1　设 $I=(U,AT,f)$是一个等价信息系统，对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，$X\subseteq F(U)$，$\alpha,\beta\in(0.5,1]$。如果 $\alpha\leqslant\beta$，则有以下性质成立：1）$\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$；2）$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\overline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$。

证明　1) 由定义 5 可得,对 $\forall x, y\in U$,有 $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} S_x^{A_i}(y)}{m} \geqslant \beta \geqslant \alpha$,由定义 6 可得

$$\left\{\wedge X(y) \left| \frac{\sum_{i=1}^{m} S_x^{A_i}(y)}{m} \geqslant \beta \right.\right\} \geqslant \left\{\wedge X(y) \left| \frac{\sum_{i=1}^{m} S_x^{A_i}(y)}{m} \geqslant \alpha \right.\right\}。$$

故有 $\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$。

2) 根据性质 1 的 1) 和定理 1 的 1) 直接得证。　　证毕

定义 7　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq AT$,$X\in F(U)$,$\lambda\in[0,1]$,$\beta\in(0.5,1]$,定义 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$ 和 $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$ 的 λ 截集分别为:

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda = \{x\in U \mid \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)(x) \geqslant \lambda\}\ ;\ \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda = \{x\in U \mid \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)(x) \geqslant \lambda\}\ 。$$

性质 2　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq AT$,$X, Y\in F(U)$,$\lambda\in[0,1]$,$\beta\in(0.5,1]$,有以下性质成立:1) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X\cap Y)_\lambda \subseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \cap \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$,$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X\cup Y)_\lambda \supseteq \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \cup \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$;2) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X\cup Y)_\lambda \supseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \cup \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$,$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X\cap Y)_\lambda \subseteq \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \cap \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$;3) $X\subseteq Y \Rightarrow \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \subseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$,$X\subseteq Y \Rightarrow \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)_\lambda \subseteq \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)_\lambda$。

根据定义 6 和性质 1 可直接得证。

定理 2　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq AT$,$X\in F(U)$,$\beta\in(0.5,1]$,有以下式子成立:1) $\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \underline{OM}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$;2) $\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \overline{PM}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$;特别地,当 $\beta=1$ 时,有 $\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \underline{GM}^{1}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)$。

根据定义 2 和定义 6 可直接得证。

3 基于等价信息系统的一般多粒度模糊粗糙集的粗糙度和精确度

定义 8　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq AT$,$X\in F(U)$,$\beta\in(0.5,1]$,定义一般多粒度模糊精确度和粗糙度分别为:

$$\alpha_{GM}^{\beta}(X) = \frac{\left|\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)\right|}{\left|\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)\right|};\ \rho_{GM}^{\beta}(X) = 1 - \frac{\left|\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)\right|}{\left|\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)\right|}。$$

当 $\left|\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X)\right| = 0$ 时,记 $\alpha_{GM}^{\beta}(X)=1$,$\rho_{GM}^{\beta}(X)=0$。

性质 3　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m \subseteq AT$,$X, Y\in F(U)$,$\beta\in(0.5,1]$,若 $X\subseteq Y$,则有:1) 当 $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)$ 时,有 $\alpha_{GM}^{\beta}(X) \leqslant \alpha_{GM}^{\beta}(Y)$ 且 $\rho_{GM}^{\beta}(X) \geqslant \rho_{GM}^{\beta}(Y)$;2) 当 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)$ 时,有 $\alpha_{GM}^{\beta}(X) \geqslant \alpha_{GM}^{\beta}(Y)$ 且 $\rho_{GM}^{\beta}(X) \leqslant \rho_{GM}^{\beta}(Y)$。

证明　1) 因为 $X\subseteq Y$,所以 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)$ 且 $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) \subseteq \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)$;当 $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m} A_i}(Y)$ 时,由定义 3 可证 $\alpha_{GM}^{\beta}(X) \leqslant \alpha_{GM}^{\beta}(Y)$ 且 $\rho_{GM}^{\beta}(X) \geqslant \rho_{GM}^{\beta}(Y)$ 成立。

2) 证明过程类似于 1)。　　证毕

性质 4　设 $I=(U,AT,f)$ 是一个等价信息系统,对于任意 $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq AT$,$X, Y\in F(U)$,$\alpha, \beta\in(0.5,1]$,若 $\alpha\leqslant\beta$,则有:1) $\alpha_{GM}^{\alpha}(X) \leqslant \alpha_{GM}^{\beta}(X)$;2) $\rho_{GM}^{\alpha}(X) \geqslant \rho_{GM}^{\beta}(X)$。

证明　由定理 6 可得，当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，有 $\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$ 且 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)$ 成立。因此有 $\left|\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|\leqslant\left|\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|$ 且 $\left|\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|\leqslant\left|\overline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|$ 成立。根据定义 8 可得

$$\frac{\left|\underline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}{\left|\overline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}\leqslant\frac{\left|\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}{\left|\overline{GM}^{\alpha}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}\leqslant\frac{\left|\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}{\left|\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|}。$$

因此有 $\alpha^{\alpha}_{GM}(X)\leqslant\alpha^{\beta}_{GM}(X)$ 成立。

2）根据定义 8 和性质 4 的(1)可直接得证。　　证毕

4 分析案例

淘宝上某些服装的宝贝详情见表 1，其中 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{10}\}$ 表示的是淘宝上的 10 款衣服；a_1 表示的是该款服装是否包邮，a_2 是该款服装尺码是否标准，a_3 是这款服装是否褪色，a_4 表示的是购买该款服装是否有运费险，a_5 表示购买该款服装是否支持货到付款，a_6 表示的是该款服装能否及时发货。某顾客对这 10 款衣服的喜欢程度为 $A=(0.8,0.7,0.6,0.9,0.7,0.5,0.6,0.8,0.6,0.5)$。然而卖家在针对商品销售时往往会列出的各种条件，如：条件 1：不仅包邮，而且有运费险；条件 2：有现货，能及时发货；条件 3：保证质量，支持货到付款；试问若至少满足以上条件中的两个时：问题 1：该顾客对这 10 款衣服一定喜欢的程度如何？问题 2：该顾客对这 10 款衣服可能喜欢的程度如何？

记条件 1 为 P_1，条件 2 为 P_2，条件 3 为 P_3，由表 1 提供的详情，可得到各个条件下的等价类分别为：

$$[x_1]_{P_1}=[x_3]_{P_1}=[x_9]_{P_1}=\{x_1,x_3,x_9\};$$
$$[x_2]_{P_1}=[x_8]_{P_1}=[x_{10}]_{P_1}=\{x_2,x_8,x_{10}\};$$
$$[x_4]_{P_1}=[x_5]_{P_1}=[x_6]_{P_1}=\{x_4,x_5,x_6\};$$
$$[x_7]_{P_1}=\{x_7\};$$
$$[x_1]_{P_2}=[x_5]_{P_2}=[x_6]_{P_2}=[x_7]_{P_2}=\{x_1,x_5,x_6,x_7\};$$
$$[x_2]_{P_2}=[x_9]_{P_2}=[x_{10}]_{P_2}=\{x_2,x_9,x_{10}\};$$
$$[x_3]_{P_2}=\{x_3\};$$
$$[x_4]_{P_2}=[x_8]_{P_2}=\{x_4,x_8\};$$
$$[x_1]_{P_3}=[x_7]_{P_3}=[x_9]_{P_3}=\{x_1,x_7,x_9\};$$
$$[x_2]_{P_3}=[x_3]_{P_3}=[x_4]_{P_3}=[x_6]_{P_3}=\{x_2,x_3,x_4,x_6\};$$
$$[x_5]_{P_3}=\{x_5\};$$
$$[x_8]_{P_3}=[x_{10}]_{P_3}=\{x_8,x_{10}\}。$$

表 1　淘宝上某些服装的宝贝详情

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	是	是	褪色	有	不支持	能
x_2	否	是	不褪色	有	不支持	否
x_3	是	否	不褪色	有	不支持	能
x_4	是	否	不褪色	无	不支持	否
x_5	是	是	褪色	无	支持	能
x_6	是	是	不褪色	无	不支持	能
x_7	否	是	褪色	无	不支持	能
x_8	否	否	不褪色	有	支持	否
x_9	是	是	褪色	有	不支持	否
x_{10}	否	是	不褪色	有	支持	否

根据定义 5 可计算出每个元素 y 在相应的属性集 P_i 下对每一个元素 x_i 的支撑函数，如表 2 所示。由定义 6 可得：

$$\underline{GM}^{\frac{2}{3}}_{\sum_{i=1}^{3}P_i}(A)=(0.6,0.5,0.6,0.5,0.5,0.5,0.6,0.5,0.6,0.5),$$
$$\overline{GM}^{\frac{2}{3}}_{\sum_{i=1}^{3}P_i}(A)=(0.8,0.7,0.6,0.9,0.7,0.9,0.8,0.8,0.8,0.8)。$$

5 结论

粒计算是近几年发展起来的一门新学科，它已成为近年来研究的一个热点。本文的主要贡献主要包括：首先，通过分析钱教授和前人在多粒度粗糙集方面的研究成果，发现他们的研究成果中还存在一种缺陷就是存在着某些粒度一定属于刻画的概念和某些粒度可能属于被刻画的概念这种情况，所以本文将这种情形进行分析将其融入到了粒计算和模糊粗糙集理论中。其次，为了更好的体现模型的思路，文中通过定义等价信息系统中的支撑函数，给出了一般多粒度模糊粗糙集模型的上、下近似算子的定义，并讨论了其性质。此外，分析发现文中定义的下上近似算子仍是模糊集，所以根据模糊集的性质文中给出了下上近似算子截集的定义并讨论了它们的性质。为了更好地分析该模型的精确性，本文还给出了等价信息系统中一般多粒度模糊粗糙集模型粗糙度和精确度的概念和性质。最后探讨了一般多粒度模糊粗糙集在其他信息系统中模型的建立问题。

表2 x_i 在条件 P_i 下对集合 X 的支撑函数

U	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$S^{P_1}_{x_1}(x_i)$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$S^{P_2}_{x_1}(x_i)$	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$S^{P_3}_{x_1}(x_i)$	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$S^{P_1}_{x_2}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
$S^{P_2}_{x_2}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
$S^{P_3}_{x_2}(x_i)$	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$S^{P_1}_{x_3}(x_i)$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$S^{P_2}_{x_3}(x_i)$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$S^{P_3}_{x_3}(x_i)$	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$S^{P_1}_{x_4}(x_i)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
$S^{P_2}_{x_4}(x_i)$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$S^{P_3}_{x_4}(x_i)$	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$S^{P_1}_{x_5}(x_i)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
$S^{P_2}_{x_5}(x_i)$	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$S^{P_3}_{x_5}(x_i)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$S^{P_1}_{x_6}(x_i)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
$S^{P_2}_{x_6}(x_i)$	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$S^{P_3}_{x_6}(x_i)$	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$S^{P_1}_{x_7}(x_i)$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$S^{P_2}_{x_7}(x_i)$	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$S^{P_3}_{x_7}(x_i)$	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$S^{P_1}_{x_8}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
$S^{P_2}_{x_8}(x_i)$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$S^{P_3}_{x_8}(x_i)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$S^{P_1}_{x_9}(x_i)$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$S^{P_2}_{x_9}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
$S^{P_3}_{x_9}(x_i)$	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$S^{P_1}_{x_{10}}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
$S^{P_2}_{x_{10}}(x_i)$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
$S^{P_3}_{x_{10}}(x_i)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

参考文献：

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[2] Ananthanarayana V S, Narasimha M M, Subramanian D K. Tree structure for efficient data mining using rough sets [J]. Pattern Recognition Letter, 2003, 24: 851-862.

[3] Qian Y H, Liang J Y, Dang C Y. Knowledge structure, knowledge granulation and knowledge distance in a knowledge base[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50: 174-188.

[4] Gong Z T, Sun B Z, Chen D G. Rough set theory for the interval-valued fuzzy information systems [J]. Information Science, 2008, 178: 1968-1985.

[5] Zadeh L A. Fuzzy set[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.

[6] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International journal of general systems, 1990, 17: 191-

209.

[7] Dubois D, Prade H. Putting rough sets and fuzzy sets together[C]//Huang S Y.Intelligent Decision Support. Netherlands: Springer, 1992: 203-232.

[8] Zhou L, Wu W Z. Characterization of rough set approximation in Atanassov intuitionistic fuzzy set theory[J].Computers and Mathematics with Application, 2011, 62(1): 282-296.

[9] Qiu T R, Liu Q, Huang H K. A granular computing approach to knowledge discovery in relational databases[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35: 1071-1079.

[10] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity[C]//Gupta M M, Ragade R K, Yager R R. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Amsterdam-New York: North-Holland Publishing Co, 1979: 3-18.

[11] Hobbs J R. Granularity [C]//The Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1985: 432-435.

[12] Yao Y Y. Perspectives of granular computing[C]//2005 IEEE International Conference on Granular Computing, 2005, 1: 85-90.

[13] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21: 1461-1474.

[14] Ma J M, Zhang W X, Leung Y, et al. Granular computing and dual Galois connection[J].Information Sciences, 2007, 177: 5365-5377.

[15] Khan M A, Ma M H. A model logic for multiple-source tolerance approximation space[J]. Logic and its Applications, 2011, 6521: 124-136.

[16] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970.

[17] Xu W H, Sun W X, Zhang X Y, et al. Multiple granulation rough set approach to ordered information systems[J]. International Journal of General Systems, 2012, 41(5): 475-501.

[18] Xu W H, Zhang X T, Wang Q R. A generalized multi-granulation rough set approach[J].Lecture Notes in Bioinformatics, 2011, 840: 681-689.

[19] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation fuzzy rough set model on tolerance relations[EB/OL]. [2014-02-01]. http://weihuaxu. com/files/Multi-granulation%20Fuzzy%20Rough%20Set%20Model%20on%20Tolerance%20Relations. pdf.

[20] Xu W H, Wang Q R, Luo S Q. Multi-granulation fuzzy rough sets[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1323-1348.

[21] 孙文鑫,卓春英,王国栋,等.序信息系统的一般多粒度粗糙集[J].计算机科学与探索,2015,9(3):376-384.
Sun W X, Zhuo C Y, Wang G D, et al. Generalized multi-granulation rough set in ordered information system[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(3): 376-384.

Generalized Multi-granulation Fuzzy Rough Set Model

SUN Wenxin[1], LIU Yufeng[2]

(1. Department of Basis, Chongqing Water Resources and Electric Engineering College, Yongchuan Chongqing 402160;
2. City College of Science and Technology, Chongqing University, Yongchuan Chongqing 402160, China)

Abstract: In recent years, the studies of multi-granulation fuzzy rough set and granular computing have become the hottest researches. The generalized multi-granulation fuzzy rough set model based equivalent information system is established by analyzing the relationships between multi-granulation and fuzzy rough set in this paper. Firstly, the general multi-granulation fuzzy rough approximation lower and upper operators are defined by support function which is based on equivalent information system. Secondly, the properties of the approximation operators based on equivalent information system are discussed. What's more, the definitions and properties of rough measure and precision are studied. Finally, an example about taobao shopping illustrates the value on practical application of this model.

Key words: rough set; multi-granulation; fuzzy set; equivalent information system

(责任编辑　黄　颖)