运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150514

二阶锥互补问题的一类新的效益函数与全局误差界*

刘　先，罗洪林

(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:基于广义 Fischer-Burmeister 函数对二阶锥互补问题(SOCCP)引入了一种新的效益函数:$\psi_{\alpha p}(x,y):=\frac{\alpha}{2}\|(x\circ y)_+\|^2+\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2$,其中 $\alpha>1,p\in(1,\infty)$。在函数 F 是强单调的假设下,建立了二阶锥互补问题的一个全局误差界,并证明了此类效益函数的水平有界性。

关键词:二阶锥互补问题;效益函数;误差界;水平有界性

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)05-0001-06

考察如下形式的二阶锥互补问题(简记为 SOCCP):

$$\langle F(x),x\rangle=0,F(x)\in\mathbf{R}^n,x\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

其中 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个连续映射,$K^n=K^{n_1}\times K^{n_2}\times\cdots\times K^{n_N},n_1,n_2,\cdots,n_N\geqslant1,n_1+n_2+\cdots+n_N=n,K^{n_i}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n_i-1}\mid\|x_2\|\leqslant x_1\}$。

SOCCP 是一类重要的数学规划问题,它是二阶锥优化问题的推广且包括线性互补问题作为其特殊退化情况。SOCCP 在力学、声学、通信、工程设计、控制优化、设备选址、天线阵列设计以及投资组合中有着广泛的应用。求解 SOCCP 的方法主要包括内点法[1-3]、非内点光滑牛顿法[4-6]、效益函数(Merit function)法[7-8]等。效益函数法是将问题(1)转化为一个与之等价的无约束极小化问题,然后通过常用的无约束极小化方法来求原问题的解。这种方法的关键是找到一个非负函数 $\psi:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$ 使得

$$\psi(x,F(x))=0\Leftrightarrow x\in K^n,F(x)\in K^n,\langle x,F(x)\rangle=0。\tag{2}$$

满足条件(2)的非负函数 ψ 通常称为 SOCCP 问题的一个效益函数。

早在 1976 年 Mangasarian[9]就对一般的非线性互补问题提出了效益函数的方法。对于一般的非线性互补问题,一大批学者基于各自不同的目的提出了大量的效益函数。利用效益函数法求解互补问题,通常可以从两个不同的方面来衡量效益函数的好坏:一方面从计算的角度看,所采用效益函数的好坏标准为求解转化成无约束极小化问题的效率高低,即在进行数值试验的时候所需时间的多少;而另一方面,误差界则是从理论上衡量效益函数选取的优劣。众所周知,在设计迭代算法求解转化后的无约束极小化问题时,都会人为地设置一个迭代终止准则,但是,此算法所设置的迭代终止准则是否能够确保所求得的解“接近”原问题的精确解?能否量化它的近似程度?如果具有误差界,这些问题就都可以得到肯定的回答。

1997 年,Luo 和 Tseng[10]对一般的非线性互补问题中提出了一类经典的效益

$$f_{\mathrm{LT}}(x):=\psi_0(\langle x,F(x)\rangle)+\psi(x,F(x)),$$

其中 $\psi_0:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ 满足:

$$\psi_0(t)=0\ \forall\ t\leqslant0,\psi_0'(t)>0\ \forall\ t>0, \tag{3}$$

$\psi:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$ 满足:

* **收稿日期**:2015-01-02　　**网络出版时间**:2015-05-15　12:44

资助项目:国家自然科学基金(No. 11226233);重庆市自然科学基金(No. CSTC2011jjA00003)

作者简介:刘先,男,研究方向最优化理论及算法,E-mail:lxmath@sina.com;**通信作者**:罗洪林,副教授,E-mail:071025013@fudan.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1244.017.html

$$\psi(x,y)=0,\langle x,y\rangle\leqslant 0\Leftrightarrow(x,y)\in K^n\times K^n,\langle x,y\rangle=0。$$

这类效益函数在1998年由Tseng[11]直接推广到了求解半定互补问题。后来,Chen[8]于2006年将其推广到了求解SOCCP,并建立了二阶锥互补问题的一个全局误差界和这类函数的水平有界性。1999年,Yamashita和Fukushima[12]在文献[10]提出的效益函数的基础上结合Fischer-Burmeister函数对半定互补问题提出了一类新的效益函数 $f_{\mathrm{YF}}(x):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$:

$$f_{\mathrm{YF}}(x):=\psi_0(\langle x,F(x)\rangle)+\psi_{\mathrm{FB}}(x,F(x)),\tag{4}$$

其中函数 ψ_0 同(3)式。$\psi_{\mathrm{FB}}:=\frac{1}{2}\|\varphi_{\mathrm{FB}}(x,F(x))\|^2$,其中,$\varphi_{\mathrm{FB}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-x-y$ 是Fischer-Burmeister函数。2005年,Chen和Tseng[7]将这类效益函数推广到了SOCCP上,但没有考虑误差界和水平集的有界性。本文将借助文献[13]中利用广义Fischer-Burmeister函数对SOCCP提出的效益函数:

$$\psi_p(x,y):=\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2。\tag{5}$$

其中,

$$\varphi_p(x,y):=\sqrt[p]{|x|^p+|y|^p}-x-y,p\in(1,\infty)。\tag{6}$$

对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,$|x|^p$ 和 $\sqrt[p]{x}$ 按照预备知识中有关定义给出。对SOCCP提出一类新的效益函数 $\psi_{\alpha p}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$:

$$\psi_{\alpha p}(x,y):=\frac{\alpha}{2}\|(x\circ y)_+\|^2+\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2。\tag{7}$$

其中 $\alpha>1$,$p\in(1,\infty)$。在一定的假设条件下,基于效益函数 $\psi_{\alpha p}$ 建立了SOCCP的一个全局误差界,并证明了此类效益函数的水平有界性。此外,为了增强文章的可读性,将在接下来的预备知识部分给出与本文相关的几个有关欧氏约当代数的基本概念和重要结论,而本文的主要结果将呈现在文章的最后一部分。

1 预备知识

对任意的 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 和 $y=(y_0;y_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,约当乘积定义如下:

$$x\circ y=(x^{\mathrm{T}}y;x_0y_1+y_0x_1)。$$

则按这样定义的约当乘积构成的欧氏约当代数的单位元为 $e=(1,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$。对任一向量 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,$x$ 的行列式和迹的定义分别为 $\det(x)=x_0^2-\|x_1\|^2$ 和 $\mathrm{tr}(x)=2x_0$。一般地,$\det(x\circ y)\neq\det(x)\det(y)$,除非 $x_0=y_0$。

引理1[15] 对任意的 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 和 $s=(s_0;s_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 有 $x\circ s=\boldsymbol{L}_xs=\boldsymbol{L}_sx=s\circ x$,$\boldsymbol{L}_x$ 是正定矩阵当且仅当 $x\in K^\circ$,其中

$$K^\circ=\{x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}:x_0>\|x_1\|\},\boldsymbol{L}_x=\begin{pmatrix}x_0 & x_1^{\mathrm{T}}\\ x_1 & x_0\boldsymbol{I}\end{pmatrix}。$$

引理2[14]**(谱分解定理)** 对任意的 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 的谱分解为 $x=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2$,其中特征值 $\lambda_i=x_0+(-1)^i\|x_1\|$,$i=1,2$,特征向量

$$c_i=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1,(-1)^i\frac{x_1}{\|x_1\|}\right),x_1\neq 0,\\ \frac{1}{2}(1,(-1)^i\omega,x_1=0,\end{cases}\quad i=1,2,$$

其中 $\omega\in\mathbf{R}^{n-1}$ 满足 $\|\omega\|=1$。

向量值函数 $|x|^p$ 和 $\sqrt[p]{x}$ 分别定义为:

$$|x|^p:=|\lambda_1|^pc_1+|\lambda_2|^pc_2,\forall x\in\mathbf{R}^n,\sqrt[p]{x}:=\sqrt[p]{\lambda_1}c_1+\sqrt[p]{\lambda_2}c_2,\forall x\in\mathbf{R}^n。$$

其中 λ_1,λ_2 和 c_1,c_2 分别为向量 x 的特征值和对应的特征向量。

引理3[14] 对任意向量 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 的特征值和特征向量若满足谱分解定理,则:

(a) $x\in K$ 当且仅当 $\lambda_1\geqslant 0$,$x\in K^\circ$ 当且仅当 $\lambda_1>0$;

(b) $x^2=\lambda_1^2c_1+\lambda_2^2c_2\in K$;

(c) 若 $x\in K$,则$\sqrt{x}=\sqrt{\lambda_1}c_1+\sqrt{\lambda_2}c_2\in K$。

引理 4[15]　对于 $x=(x_0;x_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 有 $x=[x]_++[x]_-$,其中$[x]_+$和$[x]_-$分别表示 x 在 K^n 和 $-K^n$ 上的正交投影,且$[x]_+=:[\lambda_1]_+\cdot c_1+[\lambda_2]_+\cdot c_2$,$[x]_-=:[\lambda_1]_-\cdot c_1+[\lambda_2]_-\cdot c_2$。这里 λ_i 和 $c_i(i=1,2)$分别表示谱分解定理中的特征值和特征向量,其中$[\lambda_i]_+=:\max\{0,\lambda_i\}$,$[\lambda_i]_-=:\min\{0,\lambda_i\}$,$i=1,2$。

引理 5[12]　设 Λ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一个闭凸锥。对任一 $x\in\mathbf{R}^n$,令 x_Λ^+ 和 x_Λ^- 分别记作 x 在 Λ_+ 和 Λ_- 的正交投影,则下面的结论成立:

(a) 对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$, 有 $x=x_\Lambda^++x_\Lambda^-$ 且 $\|x\|^2=\|x_\Lambda^{+2}\|^2+\|x_\Lambda^{-2}\|^2$;

(b) 对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\Lambda$, 有$\langle x,y\rangle\leqslant\langle x_\Lambda^+,y\rangle$;

(c) 如果 Λ 是自对偶的, 则对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\Lambda$, 有 $\|(x+y)_\Lambda^+\|\geqslant\|x_\Lambda^+\|$。

2 SOCCP 的效益函数及误差界分析

受文献[7]和[13]启发,在本文中引入函数(7)。下面的命题 1 证明了函数 $\psi_{\alpha p}(x,F(x))$是 SOCCP 的一个效益函数。

命题 1　设 $\psi_{\alpha p}(x,y)$是按照(7)式定义的函数,则 $\psi_{\alpha p}(x,F(x))$是 SOCCP 的一个效益函数,即满足:

(a) 对任意的向量 $x\in\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$,$\psi_{\alpha p}(x,F(x))\geqslant 0$;

(b) 对任意的向量 $x\in\mathbf{R}^n$,$\psi_{\alpha p}(x,F(x))=0\Leftrightarrow x\in K^n,F(x)\in K^n,\langle x,F(x)\rangle=0\Leftrightarrow x\in K^n,F(x)\in K^n$, $x\circ F(x)=0$。

证明　(a) $\psi_{\alpha p}(x,F(x))$ 的非负性显然成立。

(b) 由向量的约当乘积和迹的定义有 $\mathrm{tr}(x\circ y)=2\langle x,y\rangle$。又

$$\frac{\alpha}{2}\|(x\circ y)_+\|^2=0\Leftrightarrow[-(x\circ y)]\in K^n,$$

而由文献[14]可以得出

$$\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2=0\Leftrightarrow x\in K^n,y\in K^n,\langle x,y\rangle=0。$$

综上,$\psi_{\alpha p}(x,F(x))$ 是 SOCCP 的一个效益函数。　　证毕

为了进一步探索函数 $\psi_{\alpha p}(x,y)$的性质,本文给出如下 3 个引理。

引理 6[7]　函数 $\psi_\alpha(x,y):=\frac{\alpha}{2}\|(x\circ y)_+\|^2$ 在 $\mathbf{R}^{2n}$中连续可微,且

$$\nabla_x\varphi_\alpha(x,y)=\alpha L_y\cdot(x\circ y)_+,\nabla_y\varphi_\alpha(x,y)=\alpha L_x\cdot(x\circ y)_+。$$

引理 7[13]　设函数 $\psi_p(x,y):=\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2$,其中 $\varphi_p(x,y)$按(5)式定义,则:

(a) $\psi_p(x,y)$在$(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 处连续可微,且$\nabla_x\psi_p(0,0)=\nabla_y\psi_p(0,0)=0$;若$(x,y)\neq(0,0)$,且$|x|^p+|y|^p\in\mathrm{int}\,K^n$,则

$$\nabla_x\psi_p(x,y)=(L_xL_\omega^{-1}-I)\varphi_p(x,y),\nabla_y\psi_p(x,y)=(L_yL_\omega^{-1}-I)\varphi_p(x,y);$$

若$(x,y)\neq(0,0)$,且$|x|^p+|y|^p\in\mathrm{bd}^+K^n$,则

$$\nabla_x\psi_p(x,y)=\left(\frac{\mathrm{sign}(x_1)|x_1|^{p-1}}{\sqrt[q]{|x_1|^p+|y_1|^p}}-1\right)\varphi_p(x,y),\nabla_y\psi_p(x,y)=\left(\frac{\mathrm{sign}(y_1)|y_1|^{p-1}}{\sqrt[q]{|x_1|^p+|y_1|^p}}-1\right)\varphi_p(x,y)。$$

其中,$\omega=\sqrt[p]{|x|^p+|y|^p}$, $q=(1-p^{-1})^{-1}$。

(b) 对任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$,有$\langle x,\nabla_x\psi_p(x,y)\rangle+\langle y,\nabla_y\psi_p(x,y)\rangle=\|\psi_p(x,y)\|^2$。

其中,$\mathrm{int}\,K^n$ 和bd^+K^n 分别表示 K^n 的内部和去掉原点的边界构成的集合。

引理 8[8]　对任意的 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,$\langle x,y\rangle\leqslant\sqrt{2}\|(x\circ y)_+\|$。

命题 2　设 $\psi_{\alpha p}(x,y)$是按照(7)式定义的函数,则 $f(x)=:\psi_{\alpha p}(x,F(x))$满足:

(a) 对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 则 $f(x)\geqslant 0$，$f(x)=0$ 当且仅当 x 是二阶锥互补问题(1)的一个解。

(b) 若 F 可微，则 $f(x)$ 也可微，且

$$\nabla f(x)=\alpha\left[L_{F(x)}+\nabla F(x)\cdot L_x\right]\cdot(F(x)\circ x)_++\nabla_x\psi_p(x,F(x))+\nabla F(x)\nabla_y\psi_p(x,F(x))。$$

(c) 若二阶锥互补问题(1)的解集不空，则 x 是二阶锥互补问题(1)的解的充要条件是 x 是 $f(x)$ 的一个全局极小解。

证明　由命题1即可证得(a)成立。由引理6和链式法则即可证得(b)成立。下面证明命题(c)成立。若 x 是二阶锥互补问题(1)的解，由 $f(x)$ 的定义和命题1可得 x 是 $f(x)$ 的一个全局极小解。当二阶锥互补问题(1)的解集不空时，接下来利用反证法证明 x 是 $f(x)$ 的一个全局极小解能推出 x 是二阶锥互补问题(1)的解。反设 x 不是二阶锥互补问题(1) 的解，则由(a)成立 $f(x)>0$。然而，由二阶锥互补问题(1)的解集的非空性可知，至少存在一个 $y\in\mathbf{R}^n$ 使得 $f(y)=0$。因此，$f(x)>0=f(y)$。这与 x 是 $f(x)$ 的一个全局极小解矛盾，故假设不成立，定理得证。　证毕

基于上面对 SOCCP 引入的效益函数 $f(x)=:\psi_{\alpha p}(x,F(x))$，在下面的定理1中建立其全局误差界。

定理1　假设函数 F 是强单调的，且 x^* 是二阶锥互补问题(1)一个解，则存在一个 $\tau>0$ 使得

$$\tau\|x-x^*\|^2\leqslant\|(x\circ F(x))_+\|+\|(-x)_+\|+\|(-F(x))_+\|,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,$$

且

$$\tau\|x-x^*\|^2\leqslant\left(4+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)f(x)^{\frac{1}{2}},\ \forall x\in\mathbf{R}^n。$$

证明　因为 F 是强单调函数，所以，存在一个实数 $\rho>0$，使得

$$\begin{aligned}&\rho\|x-x^*\|^2\leqslant\langle F(x)-F(x^*),x-x^*\rangle=\langle F(x),x\rangle+\langle -F(x),x^*\rangle+\langle -F(x^*),x\rangle\leqslant\\&\langle F(x),x\rangle+\langle(-F(x))_+,x^*\rangle+\langle F(x^*),(-x)_+\rangle\leqslant\langle F(x),x\rangle+\|(-F(x))_+\|\cdot\|x^*\|+\|F(x^*)\|\cdot\|-(x)_+\|\leqslant\\&\sqrt{2}\,\|[F(x)\circ x]_+\|+\|(-F(x))_+\|\cdot\|x^*\|+\|F(x^*)\|\cdot\|-(x)_+\|\leqslant\\&\max\{\sqrt{2},\|F(x^*)\|,\|x^*\|\}\cdot[\|(F(x)\circ x)_+\|+\|(-F(x))_+\|+\|(-x)_+\|]。\end{aligned}$$

令 $\tau:=\dfrac{\rho}{\max\{\sqrt{2},\|F(x^*)\|,\|x^*\|\}}$，则有

$$\tau\|x-x^*\|^2\leqslant\|(x\circ F(x))_+\|+\|(-F(x))_+\|+\|(-x)_+\|。$$

进一步地，由 $\psi_\alpha:=\dfrac{\alpha}{2}\|(F(x)\circ x)_+\|^2$ 知

$$\|(F(x)\circ x)_+\|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\alpha}\psi_\alpha}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\alpha}}f(x)^{\frac{1}{2}},$$

且

$$\|(-F(x))_+\|+\|(-x)_+\|\leqslant\sqrt{2}\left(\|(-F(x))_+\|^2+\|(-x)_+\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}[8f(x)]^{\frac{1}{2}}=4f(x)^{\frac{1}{2}},$$

因此，

$$\|(x\circ F(x))_+\|+\|(-x)_+\|+\|(-F(x))_+\|\leqslant\left(4+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)f(x)^{\frac{1}{2}}。$$

本文剩下的部分将分析函数 $\psi_{\alpha p}$ 的水平有界性，下面的引理将在命题3的证明中用到。

引理9[13]　对任意的 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，有

$$4\psi_p(x,y)\geqslant 2\|\varphi_p(x,y)\|^2\geqslant\max\{\|(-x)_+\|^2,\|(-y)_+\|^2\}。$$

命题3　假设 $\{(x^k,y^k)\}\subseteq\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$，假设 $\lambda_1^k\leqslant\lambda_2^k$，$\mu_1^k\leqslant\mu_2^k$ 分别是 x^k 和 y^k 的特征值，则：

(a) 若 $\lambda_1^k\to-\infty$ 或 $\mu_1^k\to-\infty$，则 $\psi_p(x^k,y^k)\to\infty$。

(b) 假设 $\{\lambda^k\}$ 和 $\{\mu_1^k\}$ 都是下有界的，若 $\lambda_2^k\to\infty$ 或 $\mu_2^k\to\infty$ 则对任意的 $x,y\in\operatorname{int}K$，$\langle x,x^k\rangle+\langle y,y^k\rangle\to\infty$ 均成立。

证明　由引理9知

$$4\psi_p(x^k,y^k)=2\|\varphi_p(x^k,y^k)\|^2\geqslant 2\|(\varphi_p(x^k,y^k))_+\|^2\geqslant\max\{\|(-x^k)_+\|^2,\|(-y^k)_+\|^2\},$$

所以
$$8\psi_p(x^k,y^k)\geqslant\|(-x^k)_+\|^2+\|(-y^k)_+\|^2,$$

而事实上，
$$2\|(-x^k)_+\|^2=\min\{0,\lambda_1(x^k)\}^2+\min\{0,\lambda_2(x^k)\}^2,$$

所以，当 $\lambda_1x^k\to\infty$ 或 $\lambda_2x^k\to\infty$ 时有 $\|(-x^k)_+\|^2\to\infty$，$\|(-x^k)_+\|^2$ 也可以类似证明。因此，若 $\lambda_1^k\to-\infty$ 或 $\mu_1^k\to-\infty$，则 $\psi_p(x^k,y^k)\to\infty$。

对任意固定的 $x=(x_0;x_1)$，$y=(y_0;y_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 满足 $x_0>\|x_1\|$，$y_0>\|y_1\|$，由谱分解定理知

$$x^k=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda_1^k+\lambda_2^k}{2};\dfrac{\lambda_2^k-\lambda_1^k}{2}\dfrac{x_1}{\|x_1\|}\right),x_1\neq 0,\\ \left(\dfrac{\lambda_1^k+\lambda_2^k}{2};\dfrac{\lambda_2^k-\lambda_1^k}{2}\omega^k\right),x_1=0。\end{cases}$$

其中，$\omega\in\mathbf{R}^{n-1}$ 是满足 $\|\omega\|=1$ 的任意向量。因此

$$\langle x,x^k\rangle=\left\langle(x_0;x_1),\left(\frac{\lambda_1^k+\lambda_2^k}{2};\frac{\lambda_2^k-\lambda_1^k}{2}\omega^k\right)\right\rangle=\left(\frac{\lambda_1^k+\lambda_2^k}{2}\right)\cdot x_0+\left(\frac{\lambda_2^k-\lambda_1^k}{2}\right)\cdot x_1^{\mathrm{T}}\omega^k=$$

$$\frac{\lambda_1^k}{2}(x_0-x_1^{\mathrm{T}}\omega^k)+\frac{\lambda_2^k}{2}(x_0+x_1^{\mathrm{T}}\omega^k)。\tag{8}$$

因为 $\|\omega\|=1$，则 $x_0-x_1^{\mathrm{T}}\omega_k\geqslant x_0-\|x_1\|>0$，且 $x_0+x_1^{\mathrm{T}}\omega_k\geqslant x_0-\|x_1\|>0$。因为 $\{\lambda_1^k\}$ 是下有界的，所以(8)式右边第一个式子是下有界的。若 $\{\lambda_2^k\}\to\infty$ 则(8)式右边第二个式子趋于无穷大，即 $\langle x,x^k\rangle\to\infty$。同理可证，当 $\{\mu_2^k\}\to\infty$ 时，$\langle y,y^k\rangle\to\infty$。故若 $\lambda_2^k\to\infty$ 或 $\mu_2^k\to\infty$ 则对任意的 $x,y\in\mathrm{int}\ K$，$\langle x,x^k\rangle+\langle y,y^k\rangle\to\infty$ 均成立。 证毕

定理 2 设函数 ψ_{ap} 按(7)式定义。假定 F 单调可微且满足

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|F(x)\|=\infty,\tag{9}$$

假设 SOCCP 是严格可行的，也即是说存在 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$，使得 $F(\bar{x})\in\mathrm{int}\ K^n$，$\bar{x}\in\mathrm{int}\ K^n$ 则水平集 $L(\beta):=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant\beta\}$ 对所有的 $\beta\geqslant 0$ 是有界的。

证明 假设对于某个固定的 $\beta\geqslant 0$ 存在一个无界的序列 $\{x^k\}\subseteq L(\beta)$，则容易证明向量 $\{F(x^k)\}$ 和 $\{x^k\}$ 的特征值中较小者所构成的序列是下有界的。事实上，如果无下界，则由命题 3 知，$\varphi_p(x^k,F(x^k))\to\infty$。因此，$f(x)\to\infty$，这与 $\{x^k\}\subseteq L(\beta)$ 矛盾。因此 $\{x^k\}$ 的无界性和(9)式说明 $\{F(x^k)\}$ 或 $\{x^k\}$ 的特征值中较大者所构成的序列趋于无穷大。又因为 $F(x)$ 是单调的，故 $\langle x^k-\bar{x},F(x^k)-F(\bar{x})\rangle\geqslant 0$，这等价于

$$\langle x^k,F(x^k)\rangle+\langle\bar{x},F(\bar{x})\rangle\geqslant\langle x^k,F(\bar{x})\rangle+\langle\bar{x},F(x^k)\rangle,$$

由命题 3 和 $F(\bar{x})\in\mathrm{int}\ K^n$ 和 $\bar{x}\in\mathrm{int}\ K^n$ 得 $\langle x^k,F(\bar{x})\rangle+\langle\bar{x},F(x^k)\rangle\to\infty$，所以 $\langle x^k,F(x^k)\rangle\to\infty$，故 $f(x^k)\to\infty$，这与 $\{x^k\}\subseteq L(\beta)$ 矛盾。

综上所述，二阶锥互补问题的效益函数 $f(x)$ 的水平集 $L(\beta)$ 有界。 证毕

参考文献：

[1] Andersen E D, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization[J]. Mathematical Programming, 2003, 95(2): 249-277.

[2] Yoshise A. Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17(4): 1129-1153.

[3] Peng J, Roos C, Terlaky T. Primal-dual interior-point methods for second-order conic optimization based on self-regular proximities[J]. SIAM Journal on Optimization, 2002, 13(1): 179-203.

[4] Chen X D, Sun D, Sun J. Complementarity functions and numerical experiments on some smoothing Newton methods for second-order cone complementarity problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2003, 25(1/2/3): 39-56.

[5] Fukushima M, Luo Z Q, Tseng P. Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems[J]. SIAM Journal on optimization, 2002, 12(2): 436-460.

[6] Hayashi S, Yamashita N, Fukushima M. A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2005, 15(2): 593-615.

[7] Chen J S, Tseng P. An unconstrained smooth minimization reformulation of the second-order cone complementarity problem[J]. Mathematical Programming, 2005, 104(2/3): 293-327.

[8] Chen J S. Two classes of merit functions for the second-order cone complementarity problem[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 64(3): 495-519.

[9] Mangasarian O L. Equivalence of the complementarity problem to a system of non-linear equations[J]. SIAM J Appl Math, 1976, 31: 89-92.

[10] Luo Z Q, Tseng P. A new class of merit functions for the nonlinear complementarity problem[M]//Ferris M C, Pang J S. Complementarity and variational problems. Philadelphia, Pennsylvania: State of the Art, SIAM, 1997: 204-225.

[11] Tseng P. Merit functions for semi-definite complemetarity problems[J]. Mathematical Programming, 1998, 83(1/2/3): 159-185.

[12] Yamashita N, Fukushima M. A new merit function and a descent method for semidefinite complementarity problems [M]//Fukushima M, Qi L. Reformulation: nonsmooth, piecewise smooth, semismooth and smoothing methods. USA: Springer, 1999: 405-420.

[13] Pan S, Kum S, Lim Y, et al. On the generalized Fischer-Burmeister merit function for the second-order cone complementarity problem[J]. Mathematics of Computation, 2014, 83(287): 1143-1171.

[14] Chen J S. A new function and its related properties for the second-order cone complementarity problem[J]. Pacific J Optim, 2006, 2(1): 167-179.

[15] Faraut J, A Koranyi. Analysis on symmetric cones[M]. New York: Oxford Science Publications, 1994: 994.

Operation Research and Cybernetics

A New Class of Merit Functions for SOCP and the Global Error Bound

LIU Xian, LUO Honglin

(College of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, based on the generalized Fischer-Burmeister function, a new class of merit functions for second-order cone programming (SOCCP in short) is introduced which is $\psi_{\alpha p}(x,y):=\frac{\alpha}{2}\|(x\circ y)_+\|^2+\frac{1}{2}\|\varphi_p(x,y)\|^2$, where $\alpha>1, p\in(1,\infty)$. Under the assumption of F is strong monotonous, it is verified that the proposed new kind of merit functions provide an error bound for the SOCCP and possess level boundedness.

Key words: second order cone complementarity problem; merit function; error bound; level boundedness

(责任编辑 方 兴)