运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150503

α-预不变凸函数的两个新特征性质*

王海英，符祖峰，杨筱珊
(安顺学院 数理学院，贵州 安顺 561000)

摘要:给出 α-预不变凸函数的两个性质:1) 一个实值函数是 α-预不变凸函数当且仅当它是 α-预不变拟凸函数且满足中间点的 α-预不变凸性;2) 一个实值函数是 α-预不变凸函数当且仅当它是半严格 α-预不变拟凸函数且满足中间点的 α-预不变凸性。本文的结果为判断函数的 α-预不变凸性提供了新的思路。

关键词:α-预不变凸函数;α-预不变拟凸函数;半严格 α-预不变拟凸函数

中图分类号:O151.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)05-0014-05

1 预备知识

在研究数学规划问题时,凸函数和广义凸函数占有很重要的位置。已有很多文献研究了中间凸函数情形下函数成为凸函数的条件,例如文献[1]在中间点的凸性条件下,利用拟凸函数,得到了凸函数的一个判别准则;文献[2]对半严格拟凸函数,利用中间凸性,得到了凸函数的一个有趣的特征性质。人们不断的对凸函数进行推广,其中一个重要的推广是 Weir 和 Mond[3],Weir 和 Jeyakwma[4]介绍的预不变凸函数,人们对预不变凸函数做了深入的研究,获得了预不变凸函数的很多重要的特征性质,例如文献[5]在中间点的预不变凸性条件下,利用预不变拟凸函数得到了预不变凸函数的一个判别准则;文献[6]在中间点的预不变凸性条件下,利用半严格预不变拟凸函数得到了预不变凸函数的一个有趣的特征性质。文献[7]提出了 α-不变凸集、α-预不变凸函数和 α-预不变拟凸函数。文献[8]讨论了 α-预不变凸函数和 α-预不变拟凸函数的关系。文献[9]提出了严格 α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数,并讨论了 α-预不变拟凸函数、严格 α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数的性质及相互关系。文献[10]讨论了半严格 α-预不变凸函数与 α-预不变凸函数之间的关系,给出了一个结论:一个实值函数是 α-预不变凸函数当且仅当它是半严格 α-预不变凸函数且满足中间点的 α-预不变凸性。

受上述文献的启发,将文献[5-6]的结论推广到 α-预不变凸函数情形,在一定条件下,讨论了 α-预不变凸函数与 α-预不变拟凸函数、半严格 α-预不变拟凸函数的关系,得到 α-预不变凸函数的两个特征性质。并且通过将条件加以减弱,得到了同样的结论。

以下约定集合 K 是实 Hilbert 空间 H 的一个非空子集。$\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 是实值函数,$\eta:K\times K\to H$ 是向量值函数。

定义 1[7]　如果对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)\in K$,则称 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集。

定义 2[7]　设 K 是 α-不变凸集,f 是定义在 K 上的函数,如果对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)f(y)+\lambda f(x),$$

则称 f 是 K 上的 α-预不变凸函数。

定义 3[7]　设 K 是 α-不变凸集,f 是定义在 K 上的函数,如果对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\},$$

* 收稿日期:2014-10-30　　修回日期:2015-05-17　　网络出版时间:2015-05-15 12:45
资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 61304146);贵州省高校优秀科技创新人才支持计划资助项目(No. 黔教合 KY 字[2012]101);贵州省科技厅、安顺市政府、安顺学院三方联合基金(No. 黔科合 J 字 LKA[2013]19)
作者简介:王海英,女,副教授,研究方向为非线性泛函分析和最优化理论,E-mail:why8206@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1245.028.html

则称 f 是 K 上的 α-预不变拟凸函数。

定义 4[9]　设 K 是 α-不变凸集，f 是定义在 K 上的函数，如果对于 $\forall x,y\in K$，$f(x)\neq f(y)$，$\forall\lambda\in((0,1)$ 有 $f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\max\{f(x),f(y)\}$，则称 f 是 K 上的半严格 α-预不变拟凸函数。

由定义 2～定义 4 知，α-预不变凸函数是 α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数，反之未必成立。下面通过反例说明，α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数不一定是 α-预不变凸函数。

例 1　设 $K=[-1,0)$，对 $\forall x,y\in K$，令 $f(x)=1-x$，$\alpha(x,y)=\dfrac{y}{2}$，$\eta(x,y)=1$，可以验证 f 是关于 α 和 η 的 α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数。

但是，当 $x=-\dfrac{1}{5}$，$y=-\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，却有 $f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=f\left(-\dfrac{5}{8}\right)=1-\left(-\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{13}{8}>\dfrac{1}{2}f\left(-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{20}$。故 f 不是关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数。

为了讨论 α-预不变凸函数的一些性质，将用到下面的条件和引理。

条件 C[7]　$\forall x,y\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，η 和 α 满足下列关系式：

$$\eta(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\ \eta(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

显然 $\lambda=0$，$\eta(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$。

条件 A[7]　$f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$。

引理 1[11]　$\forall x,y\in K$，$\forall\lambda\in(0,1)$，如果 η 和 α 满足下列关系式：

$$\eta(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\ \alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))。$$

则 $\forall\gamma_1,\gamma_2\in[0,1]$，有

$$\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(x,y);$$

$$\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=(\gamma_1-\gamma_2)\eta(x,y)。$$

2 主要结果

下面总是假设：1）K 是关于 $\eta:K\times K\to H$ 和 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 的 α-不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$；2）η 满足条件 C，α 满足条件 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$。

为了本文主要结果证明的方便，先给出下面的一个结果。

定理 1　设 f 是 K 上的 α-预不变凸函数，如果 $\exists\gamma\in(0,1)$，使得

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y),\ \forall x,y\in K。\tag{1}$$

则集合 $A=\{\lambda\in[0,1]\mid f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in K\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密。

证明　假设 A 不在 $[0,1]$ 中稠密，那么存在 $t_0\in(0,1)$ 和 t_0 的一个邻域 $N(t_0)$，使得

$$N(t_0)\cap A=\varnothing,\tag{2}$$

根据条件 A，可知 $1\in A$，又显然 $0\in A$，因此 $\{t\in A\mid t\geqslant t_0\}\neq\varnothing$，$\{t\in A\mid t\leqslant t_0\}\neq\varnothing$。令

$$t_1=\inf\{t\in A\mid t\geqslant t_0\},\tag{3}$$

$$t_2=\sup\{t\in A\mid t\leqslant t_0\},\tag{4}$$

则根据(2)式有 $0\leqslant t_2<t_1\leqslant 1$。

因为 $(\lambda,1-\lambda)\in(0,1)$，选择 $\gamma_1,\gamma_2\in A$ 且 $\gamma_1\geqslant t_1$，$\gamma_2\leqslant t_2$，使得

$$\max\{\lambda,1-\lambda\}(\gamma_1-\gamma_2)<t_1-t_2,\tag{5}$$

下面考虑 $\bar{t}=\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2$，根据引理 1，有

$$y+\bar{t}\alpha(x,y)\eta(x,y)=y+(\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2)\alpha(x,y)\eta(x,y)=y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+$$
$$\lambda\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

从而，根据(1)式和 $\gamma_1,\gamma_2\in A$，有

$$f(y+\bar{t}\alpha(x,y)\eta(x,y))=f((y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+$$
$$\lambda\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)))\leqslant$$
$$\lambda f(y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+(1-\lambda)f(y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)\leqslant$$
$$\lambda[\gamma_1 f(x)+(1-\gamma_1)f(y)]+(1-\lambda)[\gamma_2 f(x)+(1-\gamma_2)f(y)]=\bar{t}f(x)+(1-\bar{t})f(y),$$

于是 $\bar{t}\in A$。

若 $\bar{t}\geqslant t_0$,则根据(5)式,$\bar{t}-\gamma_2=\lambda(\gamma_1-\gamma_2)<t_1-t_2$。从而 $\bar{t}<t_1$,而 $\bar{t}\geqslant t_0$ 且 $\bar{t}\in A$,此与(3)式矛盾。类似地,$\bar{t}\leqslant t_0$ 时,与(4)式矛盾。因此 A 在$[0,1]$中稠密。 证毕

定理 2 f 是 K 上的 α-预不变凸函数的充要条件是 f 是 K 上的 α-预不变拟凸函数且 $\exists\gamma\in(0,1)$,对 $\forall x,y\in K$,有

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)。\tag{6}$$

证明 必要性显然成立,只需证明充分性。用反证法。假设存在 $x,y\in K,\beta\in(0,1)$,有

$$f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y))>\beta f(x)+(1-\beta)f(y),\tag{7}$$

下面从 $f(x)=f(y)$ 和 $f(x)\neq f(y)$ 两个方面分别进行讨论。

1) 当 $f(x)=f(y)$时,又分两种情况讨论。

(i) 若 $0<\gamma<\beta\leqslant 1$,令 $\mu=\dfrac{\beta-\gamma}{1-\gamma}$,$z_\mu=y+\mu\alpha(x,y)\eta(x,y)$,$z_\beta=y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y)$,则由条件 C 及 $\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有 $z_\beta=z_\mu+\gamma\alpha(x,z_\mu)\eta(x,z_\mu)$。

由(6)、(7)式和 $f(x)=f(y)$ 以及上式知下式成立:

$$f(z_\beta)\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(z_\mu)<f(z_\mu)\tag{8}$$

另一方面,令 $t=\dfrac{\beta-\mu}{\beta}$,则由条件 C 及 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有:

$$z_\mu=z_\beta+t\alpha(y,z_\beta)\eta(y,z_\beta)$$

由 f 的 α-预不变拟凸性和 $f(y)<f(z_\beta)$ 以及上式,得 $f(z_\mu)=f(z_\beta+t\alpha(y,z_\beta)\eta(y,z_\beta))<f(z_\beta)$。这与(8)式矛盾。

(ii) 若 $0<\beta<\gamma<1$,令 $\mu=\dfrac{\beta}{\gamma}>\beta$,则由条件 C 及 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有

$$z_\beta=y+\gamma\alpha(y,z_\mu)\eta(y,z_\mu)。$$

再由(6)、(7)式以及上式,得:

$$f(z_\beta)\leqslant\gamma f(z_\mu)+(1-\gamma)f(y)<f(z_\mu)。\tag{9}$$

另一方面,令 $t=\dfrac{\mu-\beta}{1-\beta}$,则有 $z_\mu=z_\beta+t\alpha(x,z_\beta)\eta(x,z_\beta)$。根据 f 的 α-预不变拟凸性和 $f(y)<f(z_\beta)$ 以及上式,有 $f(z_\mu)=f(z_\beta+t\alpha(x,z_\beta)\eta(x,z_\beta))<f(z_\beta)$。显然与(9)式矛盾。

2) 当 $f(x)\neq f(y)$时。由定理 1 有 $f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, $\forall\lambda\in A$。这里集 A 的定义见定理 1。下面分别从 $f(x)<f(y)$ 和 $f(x)>f(y)$ 两个角度进行讨论。

(i) 若 $f(x)<f(y)$,则从(7)式和 A 在$[0,1]$中稠密知,存在 $\mu\in A,\mu<\beta$,使得

$$\mu f(x)+(1-\mu)f(y)<f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y))。$$

即:

$$f(z_\mu)=f(y+\mu\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\mu f(x)+(1-\mu)f(y)<f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y))=f(z_\beta)。\tag{10}$$

令 $t=\dfrac{\beta-\mu}{1-\mu}$,显然 $0<t<1$。由条件 C 及 $\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有 $z_\beta=z_\mu+t\alpha(x,z_\mu)\eta(x,z_\mu)$。

(a) 若 $f(x)<f(z_\mu)$,从 f 的 α-预不变拟凸性,得 $f(z_\beta)=f(z_\mu+t\alpha(x,z_\mu)\eta(x,z_\mu))\leqslant f(z_\mu)$,这与(10)式矛盾。

(b) 若 $f(x)>f(z_\mu)$,从 f 的 α-预不变拟凸性和(7)式,有

$$f(z_\beta)=f(z_\mu+t\alpha(x,z_\mu)\eta(x,z_\mu))<f(x)<\beta f(x)+(1-\beta)f(y)<f(z_\beta),$$

这显然又自相矛盾。

(c) 若 $f(x)=f(z_\mu)$,用与 1)相同的讨论,将推出矛盾。

(ii) 若 $f(x)>f(y)$。由(7)式和 A 在$[0,1]$中稠密,则存在 $\mu\in A,\mu<\beta$,使得

$$\mu f(x)+(1-\mu)f(y)<f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y)),$$

即 $f(z_\mu)=f(y+\mu\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\mu f(x)+(1-\mu)f(y)<f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y))=f(z_\beta)$。令 $t=\mu-\dfrac{\beta}{\mu}$,则

$0<t<1$，由条件 C 及 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$，有 $z_\beta=z_\mu+t\alpha(y,z_\mu)\eta(y,z_\mu)$。

(a) 若 $f(y)<f(z_\mu)$，由 f 的 α-预不变拟凸性，有

$$f(z_\beta)=f(z_\mu+t\alpha(y,z_\mu)\eta(y,z_\mu))\leqslant f(z_\mu),$$

这与(10)式矛盾。

(b) 若 $f(y)>f(z_\mu)$，由 f 的 α-预不变拟凸性和(7)式，有

$$f(z_\beta)=f(z_\mu+t\alpha(y,z_\mu)\eta(y,z_\mu))<f(y)<\beta f(x)+(1-\beta)f(y)<f(z_\beta),$$

这显然又自相矛盾。

(c) 若 $f(y)=f(z_\mu)$，用与 1)相同的讨论，将导出矛盾。

综上所述，有(7)式不真，即 f 是 K 上的 α-预不变凸函数。　　证毕

事实上，定理 2 的条件可以削弱，得到如下的结论。

定理 3　f 是 K 上的 α-预不变凸函数的充要条件是 f 是 K 上的 α-预不变拟凸函数且对 $\forall x,y\in K$，$\exists\gamma\in(0,1)$，使得 $f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)$。

注 1　定理 2 说明，在一定条件下，当中间 α-预不变凸性满足时，α-预不变凸性等同于 α-预不变拟凸性。

注 2　在定理 2 的条件下，必须要求所有的 $\gamma\in(0,1)$是相同的，而定理 3 就不必要求各个 $\gamma\in(0,1)$相同，从而在一定程度上减弱了定理 2 的条件。

注 3　定理 2 将文献[5]中的定理 4.1 的结果推广到 α-预不变凸函数情形，建立 α-预不变拟凸函数和 α-预不变凸函数的一个重要关系。

Tang 在文献[9]中的定理 3.3 给出了 α-预不变拟凸函数与半严格 α-预不变拟凸函数下面的一个关系。

引理 2[9]　f 是 K 上的 α-预不变拟凸函数的充要条件是 f 是 K 上的半严格 α-预不变拟凸函数且 $\exists\gamma\in(0,1)$，使得对 $\forall x,y\in K$，均有 $f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$。

下面结合引理 2，建立半严格 α-预不变拟凸函数和 α-预不变凸函数的一个重要关系。

定理 4　f 是 K 上的 α-预不变凸函数的充要条件是 f 是 K 上的半严格 α-预不变拟凸函数且 $\exists\gamma\in(0,1)$，使得对 $\forall x,y\in K$，均有

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)。\tag{11}$$

证明　根据(11)式，有

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)\leqslant\gamma\max\{f(x),f(y)\}+(1-\gamma)\max\{f(x),f(y)\}=\max\{f(x),f(y)\},$$

即 $\exists\gamma\in(0,1)$，使得对 $\forall x,y\in K$，均有

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}\tag{12}$$

根据 f 的半严格 α-预不变拟凸性、(12)式和引理 2，可知 f 是 K 上的 α-预不变拟凸函数。从而由(11)式和定理 2，即证得 f 是 K 上的 α-预不变凸函数。　　证毕

同理，定理 4 的条件也可以削弱，得到如下的结论。

定理 5　f 是 K 上的 α-预不变凸函数的充要条件是 f 是 K 上的半严格 α-预不变拟凸函数且对 $\forall x,y\in K$，$\exists\gamma\in(0,1)$，使得

$$f(y+\gamma\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)。$$

注 4　定理 4 和定理 5 说明在一定条件下，当中间 α-预不变凸性满足时，α-预不变凸性等同于半严格 α-预不变拟凸性。

注 5　定理 4 将文献[6]中的定理 2 的结果推广到 α-预不变凸函数情形，建立了半严格 α-预不变拟凸函数和 α-预不变凸函数的一个重要关系。

定理 2～定理 4 提供了新的判别函数的 α-预不变凸性的方法，见例 2。

例 2　设 $f(x)=-|x|$，$\alpha(x,y)=1$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant0,y\geqslant0\\ x-y, & x\leqslant0,y\leqslant0\\ y-x, & x\geqslant0,y\leqslant0\\ y-x, & x\leqslant0,y\geqslant0\end{cases}$。可以验证 f 是关于 α 和 η 的 α-预不变拟凸函数和半严格 α-预不变拟凸函数。此外对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$，可以验证 $f\left[y+\frac{1}{2}\alpha(x,y)\eta(x,y)\right]\leqslant$

$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$。

故由定理 2 或定理 4 可知 f 是关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数。

致谢：衷心感谢杨新民教授对本文撰写提供的帮助及审稿专家提出的修改意见！

参考文献：

[1] Yang X M, Teo K L, Yang X Q. A characterization of convex functions[J]. Applied Mathematics Letters, 2000, 13(1): 27-30.

[2] 杨新民. 凸函数的一个新特征性质[J]. 重庆师范学院学报：自然科学版，2000，17(7)：9-11.
Yang X M. A new characterizations of convex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2000, 17(7): 9-11.

[3] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Math Anal and Appl, 1988, 136: 29-38.

[4] Weir T, Jeyakwmar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1988, 38: 177-189.

[5] Yang X M, Li D. On properties of preinvex punctions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256: 229-241.

[6] Yang J, Yang X M. Two new characterizations of preinvex functions[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms, 2012, 19: 405-410.

[7] Noor M A, Noor K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 316: 697-706.

[8] Fan L Y, Guo Y L. On strongly α-preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 330: 1412-1425.

[9] Tang W M. On strictly and semistrictly quasi α-preinvex functions[J]. J Computational Analysis and Applications, 2013, 15(8): 1391-1402.

[10] 王海英，符祖峰. 半严格 α -预不变凸函数的一些性质[J]. 安顺学院学报，2012，14(3)：130-132.
Wang H Y, Fu Z F. Some characterizations of semistrictly α-preinvex functions[J]. Journal of Anshun University, 2012, 14(3): 130-132.

[11] Liu C P. Some Characterizations and Applications on Strongly α-preinvex and Strongly α-invex Functions[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2008, 4(4): 727-738.

Operations Research and Cybernetics

Two New Characterizations of α-Preinvex Function

WANG Haiying, FU Zufeng, YANG Xiaoshan

(Department of Mathematics and Physics, Anshun College, Anshun Guizhou 561000, China)

Abstract: Given in this paper are two characterizations of α-preinvex functions: 1) a real valued function is α-preinvex function if and only if it is intermediate-point α-preinvex and quasi-preinvex; and 2) a real valued function is α-preinvex function if and only if it is intermediate-point α-preinvex and semi-strictly quasi α-preinvex. Our results provide new thoughts to verify the α-preinvex function.

Key words: α-preinvex function; quasi α-preinvex; semi-strictly quasi α-preinvex function

（责任编辑 黄 颖）