运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150526

带有线性位置恶化及维修区间的单机排序问题*

谢秋莲，张新功
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:讨论带有线性位置恶化及维修区间与加工时间有关的单机排序问题。工件的实际加工时间与其所在的位置线性相关,维修区间长度与其前一组工件的完工时间线性相关。每次维修后都将机器恢复到最原始状态。目标函数为最大完工时间和总完工时间的和。证明在最大完工时间情形下工件满足组平衡原则。对于总完工时间问题,可以转化为线性指派问题。最后分别给出这两个问题的多项式时间算法。

关键词:排序;恶化效应;维修活动;组平衡原则

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)05-0032-06

工件的实际加工时间是与工件的加工位置或者开始加工时间相关的这种现象被称为恶化效应或学习效应[1],恶化效应大多是由于机器在加工过程中逐渐耗损,位置越靠后的工件实际加工时间会越长;学习效应大多是由于机器在加工过程中越用越灵活,加工效率越来越快,位置越靠后的工件实际加工时间会越短。Biskup[2]和 Janiak[3]分别系统地给出了带有学习和恶化效应的排序问题的一个研究综述。更多与时间相关的排序问题可参见 Gawiejnowicz[4]。

在实际工业生产中,机器加工一段时间后,由于损耗较大,为了提高工作效率,机器需要进行维修,在维修期间,机器不能对工件进行加工。Lee 和 Leon[5]首先将维修活动这一概念引入到排序问题中,并且讨论了单机环境中的一些经典目标函数(如最大完工时间、总完工时间和、加权最大完工时间、最大延迟等)。Xue[6]等人考虑工件的实际加工时间与位置相关,讨论有共同交货期、提前或延迟将产生储存或惩罚费用、最小化总费用问题。Zhao[7]等人考虑带有维修活动的极小化总完工时间的平行机排序问题。Yang 等人[8]研究了带有位置恶化效应总完工时间和问题。刘春来等人[9]研究了在退化条件下工件带有维修活动的单机排序问题,其工件的实际加工时间与其所在位置及开始加工时间有关,考虑极小化最大完工时间问题。Kabir[10]等人将前面所考虑的各种情形,如具有学习效应、退化效应、工件实际加工时间与位置有关,与开始加工时间有关,维修区间长度与位置有关等综合考虑,得到最一般的情形,将其融合在一起进行演算推导得到一般性的结论。

在考虑组独立情形时,组平衡原则将会被涉及到。所谓组平衡原则是 n 个工件分成 $k+1$ 组,每组工件个数相等或最多相差一个。Kuo 等人[11]研究问题 $1|p_jr^a, MP[k-1]|C_{\max}$,并证明组平衡原则成立。Zhao 等人[12]在 Kuo 等人[11]的基础上对问题 $1|p_jr^a, MP[k-1]|C_{\max}$ 做了进一步研究,将恶化率改进为与工件 J_j 相关,考虑工件具有一般的位置恶化效应且维修区间为常数的最大完工时间问题,即模型 $1|p_j^r=p_jr^{a_j}, M=k|C_{\max}$,利用加权二部图及线性指派得出相关算法及结论。基于 Kuo 等人[11]的思想,考虑工件具有恶化效应,且维修区间长度与前一组工件的加工时间和线性相关。本文结构如下,第二部分为问题描述,第三和第四部分是最大完工时间和总完工时间的单机排序问题的相关结论及算法描述,最后一部分是本文的结论。

1 问题描述

设有 n 个独立工件组成集合 $J=\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$ 在一台机器上加工,工件在加工过程中不可中断且零时刻都

* **收稿日期**:2014-10-24　　**修回日期**:2015-04-13　　**网络出版时间**:2015-06-08 12:29

资助项目:国家自然科学基金(No. 11401065);中国博士后基金资助项目(No. 2013M540698, No. 2014T70854);重庆市教委自然科学基金(No. KJ120624);重庆市自然科学基金(No. cstc2014jcyjA00003);重庆师范大学重点项目(No. 2011XLZ05)

作者简介:谢秋莲,女,研究方向为排序论,E-mail:xql803622@163.com;**通信作者**:张新功,副教授,E-mail:zxg7980@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150608.1229.007.html

已到达。工件 J_j 的正常加工时间为 p_j。机器可以进行多次维修(设为 k，$0\leqslant k\leqslant n$)，维修次数的上界为 k_0($k_0\leqslant n-1$)，则 n 个工件被分成 $k+1$ 组，每组至少有一个工件，第 i 组记为 G_i，第 i 次维修记为 M_i，相应的维修区间长度记为 t_i。第 i 组所有工件的加工时间和记为 F_i。每次维修都使机器恢复到最原始状态，即每次维修之后其工作效率与第一组相同，对于一个序列 π 包含有 $k+1$ 个组和 k 次维修活动，即 $\pi=[G_1,M_1,G_2,M_2,\cdots,G_k,M_k,G_{k+1}]$，其中 k 为一个决策变量。每组第 r 个位置工件 J_j 的实际加工时间为 $p_j^r=p_j+b_jr$，$b_j>0$ 为恶化率。第 i 次维修区间长度 $t_i=aF_i$，其中 $a>0$ 为常量，F_i 为第 i 组工件实际加工时间之和。考虑目标函数最大完工时间和总完工时间，即需要找到最佳维修次数 k^* 及所有工件的最优序列 π，使得最大完工时间及总完工时间最小。

本文研究的排序模型用三参数法[13]表示为

$$1\,|\,p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i\,|\,C_{\max},1\,|\,p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i\,|\,\sum C_j\text{。}$$

给定一个序列 π，若 $k=k_0$，则所有工件被分成 k_0+1 组，记为 $G_1,G_2,\cdots,G_{k_0},G_{k_0+1}$，每组工件个数分别记为 $n_1,n_2,\cdots,n_{k_0},n_{k_0+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{k_0+1}n_i=n$，第 i 组第 r 位置的工件记为 J_{ir}，$i=1,\cdots,k_0+1$，$r=1,\cdots,n_i$，则 G_i 可表示为 $G_i=[J_{i1},J_{i2},\cdots,J_{in_i}]$，工件 J_{ir} 的正常加工时间记为 p_{ir}，相应的恶化效率为 b_{ir}，完工时间为 C_{ir}，则

$$C_{11}=p_{11}+b_{11}\cdot 1,C_{12}=p_{11}+b_{11}\cdot 1+p_{12}+b_{12}\cdot 2=\sum_{r=1}^{2}p_{1r}+b_{1r}\cdot r,\cdots,$$

$$C_{1n_1}=\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r),F_1=C_{1n_1}=\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r),t_i=aF_1=a\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r),$$

$$C_{21}=C_{1n_1}+t_1+(p_{21}+b_{21}\cdot 1)=\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r)+a\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r)+(p_{21}+b_{21}\cdot 1),$$

$$\cdots$$

$$C_{2j}=\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r)+a\sum_{r=1}^{n_1}(p_{1r}+b_{1r}\cdot r)+\sum_{r=1}^{j}(p_{2r}+b_{2r}\cdot r)\,(j=1,\cdots,n_2),$$

$$\cdots$$

$$C_{ij}=\sum_{i=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{n_k}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{n_1}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+\sum_{r=1}^{j}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)\,(j=1,\cdots,n_i),$$

$$\cdots$$

$$C_{k_0+1,n_{k_0+1}}=\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r),$$

$$C_{\max}=C_{k_0+1,n_{k_0+1}}=\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r),\tag{1}$$

$$\sum C_j=\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{j=1}^{n_i}C_{ij}=\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{j=1}^{n_i}\Big[\sum_{i=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+\sum_{r=1}^{j}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)\Big]=$$
$$\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)\text{。}\tag{2}$$

Hardy[14]等首次对匹配算法进行了阐述：

引理 1　假设存在两个数列 x_i 和 y_i，当 x_i 和 y_i 的大小排列顺序正好相反时，乘积之和 $\sum x_iy_i$ 取得最小值。

2 极小化最大完工时间问题

本节介绍带有恶化效应，工件的实际加工时间与工件所在位置线性相关，机器维修区间长度与前一组工件的总加工时间和有关的单机排序问题，考虑目标函数为极小化最大完工时间的主要结论及算法。

定理 1　对于 $1\,|\,p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i\,|\,C_{\max}$ 问题，如果没有维修，则按 b_j 由大到小排列得到的工件序列为最优。

证明　假设 π 为最优的工件序列，若不是按 b_j 由大到小顺序排列，则一定存在两个相邻工件有 $b_i<b_j$，交换工件 J_i,J_j 位置得到序列 π'，其他工件顺序均保持不变。设工件 J_i 开始加工时刻为 t_0，工件 J_i 在序列 π 中完工

时间记为 C_i，在序列 π' 中完工时间记为 C_i'，则：

$$C_i=t_0+p_i+b_ir, C_j=t_0+p_i+b_ir+p_j+b_j(r+1),$$
$$C_j'=t_0+p_j+b_jr, C_i'=t_0+p_j+b_jr+p_i+b_i(r+1)。$$

序列 π' 中工件 J_i 完工时间与序列 π 中工件 J_j 完工时间之差为：

$$C_i'-C_j=t_0+p_j+b_jr+p_i+b_i(r+1)-t_0-p_i-b_ir-p_j-b_j(r+1)=b_i-b_j,$$

由 $b_i<b_j$，则 $C_i'-C_j<0$，与 π 为最优序矛盾。 证毕

推论1 设 $C^*_{\max}$ 表示 $1|p_j^r=p_j+b_jr, b_j>0, M=k, t_i=aF_i|C_{\max}$ 在 $k=0$ 时的最优值，对于 $1|p_j^r=p_j+b_jr, b_j>0, M=k, t_i=aF_i|C_{\max}$ 问题，如果 $C^*_{\max}-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j\leqslant a\min\{p_j\}, j=1,\cdots,n$，则按 b_j 由大到小排列得到的工件序列为最优序列。

证明 $C^*_{\max}-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j\leqslant a\min\{p_j\}, j=1,\cdots,n$ 意味着由位置恶化引起的总的最大增加时间小于或等于最小维修区间长度，则不需要维修，由定理1即得证。 证毕

由推论1可知，对于 $1|p_j^r=p_j+b_jr, b_j>0, M=k, t_i=aF_i|C_{\max}$ 问题，若 $C^*_{\max}-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j>a\min\{p_j\}, j=1,\cdots, n, a>0$ 时，机器需要进行维修。

组平衡原则[12]：假设一台机器对 n 个工件进行加工，对机器进行 k 次维修，将工件分成 $k+1$ 组，$G_1, G_2,\cdots, G_{k+1}$ 则 $\lfloor n/(k+1)\rfloor\leqslant n_i\leqslant\lfloor n/(k+1)\rfloor+1$。

定理2 对于 $1|p_j^r=p_j+b_jr, b_j>0, M=k, t_i=aF_i|C_{\max}$，如果 k 固定，则存在最优序使得每组工件个数满足组平衡原则。

证明 设 π 为最优序，机器维修 k 次，将工件分成 $k+1$ 组，记为 $G_1, G_2,\cdots, G_{k+1}$。假设组中工件个数不满足组平衡原则，即至少有两组所含工件个数之差大于1，若记这样的两组为 G_i, G_j，各自所含工件个数分别为 n_i, n_j，则 $n_i-n_j>1$，记 $\pi=[\pi_1, G_i, \pi_2, G_j, \pi_3]$，$\pi_1, \pi_2, \pi_3$ 分别为序列 π 的一部分。设 $G_i=[J_{i1}, J_{i2},\cdots, J_{in_i}]$，$G_j=[J_{j1}, J_{j2},\cdots, J_{jn_j}]$，将 G_i 中最后一个工件 J_{in_i} 移到 G_j 组中最后位置，形成新的组。

$$\tilde{\tilde{G}}_i=[J_{i1}, J_{i2},\cdots, J_{i,n_i-1}], \tilde{\tilde{G}}_j=[J_{j1}, J_{j2},\cdots, J_{j,nj+1}]。$$

1）若 G_i, G_j 不取最后一组，则工 J_i 件在序列 π 中实际加工时间及维修时间和 T_1，工件 J_i 在序列 π' 中实际加工时间及维修时间和 T_2 分别为：

$$T_1=p_i+b_in_i+a(p_i+b_in_i),\ T_2=p_i+b_i(n_j+1)+a[p_i+b_i(n_j+1)]。$$

因为 $n_i-n_j>1$，即 $n_i>n_j+1, a>0, b_j>0$，则

$$T_2-T_1=b_i(n_j+1)-b_in_i+a[b_i(n_j+1)-b_in_i]=b_i[(n_j+1)-n_i]+ab_i[(n_j+1)-n_i]=$$
$$(b_i+ab_i)[(n_j+1)-n_i]<0。$$

2）若 G_j 取最后一组，即 G_i 与 G_{k_0+1} 中工件个数之差大于1，则工件 J_i 在序列 π 中实际加工时间及维修时间和 T_1，工件 J_i 在序列 π' 中实际加工时间 T_2 分别为：

$$T_1=p_i+b_in_i+a(p_i+b_in_i), T_2=p_i+b_i(n_{k_0+1}+1)。$$

因为 $n_i-n_{k_{0+1}}>1$，即 $n_i>n_{k_{0+1}}+1, a>0, b_j>0$，则

$$T_2-T_1=b_i(n_{k_0+1}+1)-b_in_i-a(p_i+b_in_i)=b_i[(n_{k_0+1}+1)-n_i]-a(p_i+b_i)<0。$$

综上可知，$T_2<T_1$，与 π 为最优序矛盾。 证毕

定理3 对于 $1|p_j^r=p_j+b_jr, b_j>0, M=k, t_i=aF_i|C_{\max}$ 问题，如果 $k=k_0$ 且工件按照组平衡原则分成 k_0+1 组，$G_1, G_2,\cdots, G_{k_0+1}$，则存在最优序，其工件序列按照 b_j 由大到小顺序得到，且排好的工件一个接一个地分到每组最早可用位置，即第一个工件被安排在第一组的第一个位置，第二个工件被安排在第二组的第一个位置，第 k_0+1 个工件被安排在第 k_0+1 组的第一个位置，第 k_0+2 个工件被安排在第一组的第二个位置，依此类推。

证明 设 $m=\mathrm{mod}(n, k_o+1)$，即 m 为 n 除以 k_0+1 的余数，分 $m\neq0$ 和 $m=0$ 两种情况阐述：

1）当 $m\neq0$ 时，令 $h=\lceil j/(k_0+1)\rceil$，则序列前 m 组有 h 个工件，其余组有 $h+1$ 个工件。由

$$C_{\max}=\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{r=1}^{n_i}(p_{ir}+b_{ir}\cdot r)=$$

$$\sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{r=1}^{n_i} p_{ir} + a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{r=1}^{n_i} p_{ir} + \sum_{i=1}^{k_0+1}\sum_{r=1}^{n_i} b_{ir} r + a\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{r=1}^{n_i} b_{ir} r$$

每组中位置 r 逐渐增大，$a>0$ 为常数，有引理 1 知：当

$$b_{11}\geqslant b_{21}\cdots\geqslant b_{k+1,1}\geqslant b_{21}\geqslant b_{22}\geqslant\cdots\geqslant b_{k+1,2}\geqslant\cdots\geqslant b_{1,h-1}\geqslant b_{2,h-1}\cdots\geqslant b_{2,h}\geqslant\cdots\geqslant b_{m,h}$$

时，$C_{\max}$ 取最小。

2）当 $m=0$ 时，即 n 个工件平均分到 k_0+1 组中而没有剩余，同理可得，故定理得证。　　证毕

定理 4　对问题 $1|p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i|C_{\max}$，工件按 b_j 由大到小排列，存在最优序使得工件 J_j，$1\leqslant j\leqslant n$ 排在某组的 $\lceil j/(k+1)\rceil$ 位置。

证明　由定理 1 知每个组内工件都是按 b_j 由大到小顺序排列的。由定理 3 知，若要最小化最大完工时间，需将所有工件按照 b_j 由大到小顺序一个按一个的安排在每组最早可用位置。当 $j=h(k+1)$，则 j 所有前继都安排在第 $1,2,\cdots,k$ 组前 h 位置和 $k+1$ 组的前 $k-1$ 位置，由定理 3，则工件 J_j 应排在第 $k+1$ 组第 h 位置，即 $h=\lceil j/(k+1)\rceil$。当 $j=h(k+1)+m$，$1\leqslant m\leqslant k$，则 j 所有前继都被安排在第 $1,2,\cdots,m-1$ 组前 $h+1$ 位置和 $m,m+1,\cdots,k,k+1$ 组前 h 位置，由定理 3 知，工件 J_j 应被安排在第 m 组 $h+1$ 位置，即 $h+1=\lceil j/(k+1)\rceil$，故定理得证。　　证毕

下面给出 $1|p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i|C_{\max}$ 的算法。

算法 1

步骤 1　将所有工件按 b_j 由大到小顺序排列。

步骤 2　判断 $C^*_{\max}-\sum_{j=1}^{n}p_j\leqslant a\min\{p_j\}$，$j=1,\cdots,n$，是否成立。若成立则 $k=0$，若不成立，则进行下一步。

步骤 3　按照组平衡原则对工件分组，再由(1)式计算 $C_{\max}(\pi(k))$，$k=1,\cdots,n$。

步骤 4　$C_{\max}(\pi(k^*))=\min\{C_{\max}(\pi(k))|1\leqslant k\leqslant n\}$，则 k^* 即为最优维修次数。

定理 5　对于极小化最大完工时间问题，算法 1 的时间复杂性为 $O(n\log n)$。

证明　由算法 1，在步骤 1 中的时间复杂性为 $O(n\log n)$，对每个确定的 k，时间复杂度为 $o(1)$，故其时间复杂性为 $O(n\log n)$。

例 1　求下列工件的最佳维修次数及其极小化最大完工时间。对于 7 个工件需要在同一台机器上进行加工，正常加工时间及相应的恶化率分别如下：

$$p_1=5,\ p_2=8,\ p_3=6,\ p_4=3,\ p_5=5,\ p_6=7,\ p_7=4,$$

$$a=0.2,\ b_1=0.3,\ b_2=0.8,\ b_3=0.7,\ b_4=0.4,\ b_5=0.9,\ b_6=0.6,\ b_7=0.5。$$

解　按 b_j 由大到小排序得序列 $J_5\to J_2\to J_3\to J_6\to J_7\to J_4\to J_1$，$k=0$，$G_1=(J_5,J_2,J_3,J_6,J_7,J_4,J_1)$，$\sum_{j=1}^{7}p_j=38$，$C^*_{\max}=52$，$C^*_{\max}-\sum_{j=1}^{n}p_j\leqslant a\min\{p_j\}$，$j=1,\cdots,7$，故需要维修。

$$k=0,G_1=(J_5,J_2,J_3,J_6,J_7,J_4,J_1),C^*_{\max}=52;$$

$$k=1,G_1=(J_5,J_6,J_7,J_1),G_2=(J_2,J_6,J_4),C_{\max}(\pi(1))=51.2;$$

$$k=2,G_1=(J_5,J_6,J_1),G_2=(J_2,J_7),G_3=(J_3,J_4),C_{\max}(\pi(2))=53.16;$$

$$k=3,G_1=(J_5,J_7),G_2=(J_2,J_4),G_3=(J_3,J_1),G_4=(J_6),C_{\max}(\pi(3))=49.89;$$

$$k=4,G_1=(J_5,J_4),G_2=(J_2,J_1),G_3=(J_3),G_4=(J_6),G_5=(J_7),C_{\max}(\pi(4))=50.58;$$

$$k=5,G_1=(J_5,J_1),G_2=(J_2),G_3=(J_3),G_4=(J_6),G_5=(J_7),G_6=(J_4),C_{\max}(\pi(5))=50.32;$$

$$k=6,G_1=(J_5),G_2=(J_2),G_3=(J_3),G_4=(J_6),G_5=(J_7),G_6=(J_4),G_7=(J_1),C_{\max}(\pi(6))=49.93。$$

由上可知 $k=3$ 时为最优，$C_{\max}=49.89$，其最优工件序列为 $(J_5,J_7)\to(J_2,J_4)\to(J_3,J_1)\to(J_6)$。

3 极小化总完工时间问题

本节介绍 $1|p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i|\sum C_j$ 的主要结论及其算法，将该问题转化为指派问题进行求解，证明极小化总完工时间是多项式可解的，其算法复杂性为 $O(n^{k_0+3})$，其中 k_0 为维修次数的上界。

给定维修次数 k，n 个工件被分成 $k+1$ 组，根据 Mosheiov[15]，用 $p(n,k+1)=(n_1,n_2,\cdots,n_{k+1})$ 表示每组工件个数的分配向量，设最大维修次数为 k_0，则 $k_0\leqslant(n-1)$。由(2)式知

$$\sum C_j=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_l}(p_{lr}+b_{lr}\cdot r)+a\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_l}(p_{lr}+b_{lr}\cdot r)=$$

$$(1+a)\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_l}(p_{lr}+b_{lr}\cdot r)+\sum_{l=1}^{k+1}\sum_{r=1}^{n_l}(p_{lr}+b_{lr}\cdot r)。$$

令

$$\theta_{ilr}=\begin{cases}(1+a)(p_{lr}+b_{lr}\cdot r),\ l=1,2,\cdots,k,\\ p_{lr}+b_{lr}\cdot r,\ l=k+1。\end{cases}\tag{3}$$

则 $\sum C_j=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_l}\theta_{ilr}$ 。

该问题可转化为指派问题进行求解,方法如下:

$$\begin{aligned}\min\quad&\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{n_l}\theta_{ilr}x_{ilr},\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{i=1}^{n}x_{ilr}=1,l=1,2,\cdots,k+1,r=1,2,\cdots,n_i,\\ &\sum_{l=1}^{k+1}\sum_{r=1}^{n_i}x_{ilr}=1,\ i=1,2,\cdots,n,\\ &x_{ilr}=0,1,\ i=1,2,\cdots,n,l=1,2,\cdots,k+1,r=1,2,\cdots,n_i。\end{aligned}\tag{4}$$

定义 x_{ilr} ,当工件 J_j 被安排在第 l 组第 r 位置时 $x_{ilr}=1$,否则 $x_{ilr}=0$。对于给定维修次数 k 和分配向量 $p(n,k+1)=(n_1,n_2,\cdots,n_{k+1})$,解决该指派问题的时间复杂性为 $O(n^3)$,下面考虑分配向量 $p(n,k+1)$ 有多少个,对于给定的维修次数 k ,第 G_i 组的工件个数 n_i 可能为 $1,2,\cdots,(n-1)$,$i=1,2,\cdots,k+1$。因此如果前 k 组工件个数已知,则第 $k+1$ 组工件个数也就可以唯一确定,故向量 $p(n,k+1)$ 个数的上界为 $(n-1)^k\leqslant n^{k_0}$ 。因此有以下定理成立。

定理 6 对于极小化总完工时间和当前问题的时间复杂性为 $O(n^{k_0+3})$ 。

证明 对于给定的 k ,问题 $1|p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i|\sum C_j$ 可以通过指派问题求解,时间复杂度为 $O(n^3)$,又由于 k 可取 0 到 $n-1$ 共 n 个值,由以上分析可知问题 $1|p_j^r=p_j+b_jr,b_j>0,M=k,t_i=aF_i|\sum C_j$ 的时间复杂性为 $O(n^{k_0+3})$ 。 证毕

4 结论

本文研究工件的实际加工时间具有线性位置恶化效应,维修区间长度与前一组工件总加工时间和线性相关的组独立单机排序问题。当机器没有进行维修时的最大完工时间 $C^*_{\max}$ 满足 $C^*_{\max}-\sum_{j=1}^{n}p_j\leqslant a\min\{p_j\}$ 时,说明机器需要进行维修。并证明极小化最大完工时间满足组平衡原则。工件按照位置恶化率不减的顺序,依次填满每组的最早可用位置,直到将所有工件都排完,得到的工件序列为最优。证明极小化最大完工时间问题是多项式时间可解的,其时间复杂性为 $O(n\log n)$ 。进而研究了极小化总完工时间和问题,将其转化为线性指派问题进行求解,并证明是多项式时间可解的,其时间复杂性为 $O(n^{k_0+3})$ 。

参考文献:

[1] Bachman A, Janiak A. Scheduling jobs with position-dependent processing times[J]. The Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 257-264.

[2] Biskup D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188: 315-329.

[3] Janiak A, Kovalyov M Y. Scheduling in a contaminated area: a model and polynomial algorithms[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 173: 125-132.

[4] Gawiejnowicz S. Time-Dependent scheduling[M]. Berlin: Springer, 2008.

[5] Lee C Y, Leon V. Machine scheduling with a rate-modifying activity[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 128: 119-128.

[6] Xue P F, Zhang Y L, Yu X Y. Single-machine scheduling with piece-rate maintenance and interval constrained posi-

tion-dependent processing times[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,226:415-422.

[7] Zhao C L, Tang H Y, Cheng C D. Two-parallel machines scheduling with rate-modifying activities to minimize total completion time[J]. European Journal of Operation Research,2009,198:354-357.

[8] Yang S J, Yang D L. Minimize the total completion time in single-machine scheduling aging/deteriorating effects and deteriorating maintenance activities [J]. Computer and Mathematics with Applications,2010,60:2161-2169.

[9] 刘春来,赵传立. 退化条件下具有维修活动的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,28(4):6-10. Liu C L, Zhao C L. The problem of single-machine scheduling with rate-modifying activities under deterioration[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011,28(4):6-10.

[10] Kabir R, Strusevich V A. Combining time and position dependent effects on a single machine subject to rate-modifying activities[J]. Omega,2014,42:166-173.

[11] Kuo W H, Yang D L. Minimizing the makespan in a single-machine scheduling problem with the cyclic process of an aging effect[J]. Journal of the Operational Research Society,2008,59:416-420.

[12] Zhao C L, Tang H Y. Single machine scheduling with general job-dependent aging effect and maintenance activities to minimizemakespan[J]. Applied Mathematical Modelling,2010,34:837-841.

[13] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics,1979, 5:287-326.

[14] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press,1934.

[15] Mosheiov G. Parallel machine scheduling with a learning effect[J]. European Journal of Operation Research Society,2001,52:1165-1169.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling with a Linear Position Deterioration and Rate-modifying Maintenance

XIE Qiulian, ZHANG Xingong

(College of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we investigate single-machine scheduling problem with a linear positional deterioration effect and maintenance interval. The actual processing time of job is linearly related to its position and the maintenance interval is linearly related to the total processing time of all jobs scheduled in the former group. After maintenance, machine will restore to its original perfect state. We focus on minimizing two classical objectives: the makespan and the total completion times. We prove that group balance principle is satisfied under the makespan, and we can convert the total completion time problem into linear assignment problem. Finally, we also present two polynomial time algorithms to solve the proposed two problems.

Key words: scheduling; deterioration effect; maintenance activity; group balance principle

(责任编辑 游中胜)