DOI:10.11721/cqnuj20150529

特殊线性群 $L_3(37)$和 $L_2(11^3)$的最短共轭类刻画*

余大鹏[1], 李金宝[1], 马纪成[1], 张良才[2]
(1.重庆文理学院 数学系, 重庆 永川 402160; 2.重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

摘要:利用群的数量特征刻画有限单群很有意义。利用群的阶及最短共轭类长刻画了素因子个数为 6 和 7 的两个有限非交换单群。证明了特殊线性群 $L_3(37)$和 $L_2(11^3)$是可用群的阶及最短共轭类长来刻画的。

关键词:有限单群;最短共轭类长;刻画
中图分类号:O152.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2015)05-0085-03

本文所研究的群都是有限群。对任意群 G,用 $\pi(G)$表示群 G 的所有素因子的集合;用 $\Gamma(G)$表示与 G 相关的素图,其中 $\Gamma(G)$的顶点集合是 $\pi(G)$,$\Gamma(G)$中 p 与 q 相连当且仅当 $pq\in\pi(G)$[1];用 $Syl_p(G)$表示群 G 的所有 Sylow$p$-子群的集合,其中 $p\in\pi(G)$;用 G_p 表示 G 的一个 Sylow$p$-子群;用 $Soc(G)$表示 G 的基柱,即 G 的所有极小正规子群生成的子群;用 $cl_G(x)$表示 G 中包含 x 的共轭类;用 $C_G(x)$表示 G 的元素 x 的中心化子。设 G 是一个有限单群,若 $|\pi(G)|=n$,其中 n 是自然数,称 G 是一个单 K_n-群。其他符号见文献[2-3]。

众所周知,一个群的共轭类长的集合对这个群本身的结构有着重要影响。设 G 是一个群,令 $cs(G)=\{|G:C_G(x)|:x\in G\}$。

Thompson 在 1980 年代提出如下的猜想。

Thompson's **猜想**[4] 令有限群 G 满足 $Z(G)=1$。如果有限非交换单群 L 满足 $cs(G)=cs(L)$,则 $G\cong L$。

陈贵云教授在其博士论文以及文献[5]等证明了:设有限群 G 满足 $Z(G)=1$。如果有限非交换单群 L 满足 $\Gamma(G)$不连通且 $cs(G)=cs(L)$,则 $G\cong L$。一个有趣的问题是:能否弱化上述猜想中的条件?换言之,可否用某些特殊的共轭类长来刻画有限单群?设 G 是一个群。令

$$lcs(G)=\max\{|G:C_G(x)|\,|\,x\in G\},\ scs(G)=\min\{|G:C_G(x)|\,|\,x\in G\backslash Z(G)\}。$$

李金宝在博士论文[6]中利用特殊的共轭类长去刻画有限单群,例如利用群的阶及 $lcs(G)$或 $scs(G)$刻画了所有散在单群[2]。进一步地,李金宝等人利用上述条件刻画了单 K_3-群和单 K_4-群及其自同构群,例如文献[7]。本文利用群的阶及 $scs(G)$刻画了素因子个数为 6 和 7 的两个非交换单群。

1 基本引理

引理 1 令 G 是有限群且 $\overline{G}=G/Z(G)$。设 $\overline{N}$ 是 $\overline{G}$ 的极小正规子群,N 是 $\overline{N}$ 在 G 中的原象。如果存在 $p\in\pi(G)$以及 $N_p\in Syl_p(N)$有 $|N_p|<scs(G)$,则 $\overline{N}$ 不可解。

证明可参考文献[7]的引理 2.1。

引理 2 令 G 是有限群且 $\overline{G}=G/Z(G)$。如果对任意的 $p\in\pi(G)$,都有 $|G_p|<scs(G)$,则有 $Soc(\overline{G})\trianglelefteq\overline{G}\leqslant Aut(Soc(\overline{G}))$。

证明可参考文献[7]的推论 2.2。

引理 3 令 G 是满足 $\pi(G)\subseteq\{2,3,7,19,37,67\}$的有限非交换单群,则 G 同构于表 1 所列有限单群。

* **收稿日期:**2014-11-26 **网络出版时间:**2015-06-08 12:29
资助项目:国家自然科学基金(No. 11171364);重庆市自然科学基金(No. cstc2013jcyjA00034);重庆高校创新团队建设计划资助项目(No. KJTD201321);重庆市教委自然科学基金(No. KJ131204);永川区科委项目(No. Ycstc 2013nc8006);重庆文理学院校内科研资助项目(No. Z2013SC10);重庆文理学院人才引进项目(No. R2012SC21)
作者简介:余大鹏,男,副教授,博士研究生,研究方向为代数学群论,E-mail:yudapeng0@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150608.1229.004.html

表1 有限非交换单群 $\pi(G)\subseteq\{2,3,7,19,37,67\}$

G	$\|G\|$	$Out(G)$	G	$\|G\|$	$Out(G)$
$L_2(37)$	$2^2\cdot3^2\cdot19\cdot37$	2	$L_3(7)$	$2^5\cdot3^2\cdot7^3\cdot19$	6
$U_3(8)$	$2^9\cdot3^4\cdot7\cdot19$	18	$U_3(3)$	$2^5\cdot3^3\cdot7$	2
$L_2(8)$	$2^3\cdot3^2\cdot7$	3	$L_2(7)$	$2^3\cdot3\cdot7$	2
$L_3(37)$	$2^5\cdot3^4\cdot7\cdot19\cdot37^3\cdot67$	2			

证明可参考文献[3]的表1和文献[2]的表5。

引理4 令 G 是满足 $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,19,37\}$ 的有限非交换单群，则 G 同构于表2所列有限单群。

与引理3同理易证。

引理5 令 $S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_k$，其中 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是 n_i 个同构非交换的单群 H_i 的直积，且如果 $i\neq j$，有 H_i 与 H_j 不同构，则 $Aut(S)=Aut(S_1)\times\cdots\times Aut(S_k)$ 且 $Aut(S_i)$ 是 $Aut(H_i)$ 与 S_{n_i} 圈积，其中 S_{n_i} 是 n_i 次对称群。进一步地，$Out(S)=Out(S_1)\times\cdots\times Out(S_k)$ 且 $Out(S_i)$ 是 $Out(H_i)$ 与 S_{n_i} 圈积。

证明可参考文献[8]的定理3.3.20。

2 主要定理

定理1 如果有限群 G 满足 $G=2^5\cdot3^4\cdot7\cdot19\cdot37^3\cdot67$ 且 $scs(G)=2^3\cdot3^3\cdot7\cdot19\cdot67$，则 $G\cong L_3(37)$。

证明 令 $x\in G$ 满足 $scs(G)=|cl_G(x)|=2^3\cdot3^3\cdot7\cdot19\cdot67$。对任意元 $x\in G$，显然有 $Z(G)\leqslant C_G(x)$。因此比较群阶与最小共轭类长，有 $\{7,19,67\}\notin\pi(Z(G))$。

考虑 $\overline{G}=G/Z(G)$。设 $G_p\in Syl_p(G)$，这里 $p\in\pi(G)$，那么 $|G_p|<scs(G)$。由引理2和引理1，有 $Soc(\overline{G})\lhd\overline{G}\leqslant Aut(Soc(\overline{G}))$ 且 $\overline{G}$ 的每个极小正规子群是不可解的。令 $M=Soc(\overline{G})=S_1\times S_2\times\cdots\times S_k$，其中 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是引理3表1中某些单群。

表2 有限非交换单群 $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,19,37\}$

G	$\|G\|$	$Out(G)$	G	$\|G\|$	$Out(G)$
$L_2(7)$	$2^3\cdot3\cdot7$	2	$L_2(8)$	$2^3\cdot3^2\cdot7$	3
$U_3(3)$	$2^5\cdot3^3\cdot7$	2	A_7	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$	2
$L_2(49)$	$2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$	4	$U_3(5)$	$2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7$	6
$L_3(4)$	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	12	A_8	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	2
A_9	$2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7$	2	J_2	$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$	2
$U_4(3)$	$2^7\cdot3^6\cdot5\cdot7$	8	$S_4(7)$	$2^8\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^4$	2
$S_6(2)$	$2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7$	1	$O_8^+(2)$	$2^{12}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7$	6
$L_2(19)$	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot19$	2	$L_3(7)$	$2^5\cdot3^2\cdot7^3\cdot19$	6
$U_3(8)$	$2^9\cdot3^4\cdot7\cdot19$	18	$U_3(19)$	$2^5\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^3\cdot19^3$	2
$L_4(7)$	$2^9\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^6\cdot19$	4	J_1	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot19$	1
$L_3(11)$	$2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot11^3\cdot19$	2	HN	$2^{14}\cdot3^6\cdot5^6\cdot7\cdot11\cdot19$	2
$L_2(37)$	$2^2\cdot3^2\cdot19\cdot37$	2	$L_2(11^3)$	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot19\cdot37$	2

1）证明 $7\in\pi(M)$。

如果 $7\notin\pi(M)$，那么 $7\in\pi(Out(M))$。根据表1，可知 M 是 k 个同构于 $L_2(37)$ 的单群的直积。由引理5知 $19^7\mid|M|$，矛盾于 $|G|=2^5\cdot3^4\cdot7\cdot19\cdot37^3\cdot67$。

2）证明 $19\in\pi(M)$。

如果 $19\notin\pi(M)$，那么 $19\in\pi(\overline{G})$ 且 $19\in\pi(Aut(G))$。因为 $7\in\pi(M)$ 以及 $19\notin\pi(M)$，由引理3表1知 $S_i\cong L_2(8),L_2(7),U_3(3)(i=1,2,\cdots,k)$。由表1及引理5可知，$7^{19}\mid |M|$，矛盾。因此，$19\in\pi(M)$。

与上面类似地，有 $67\in\pi(M)$。于是，$\{7,19,67\}\in\pi(M)$。

因此又由引理3表1知 $M\cong L_3(37)\lhd\overline{G}\leqslant Aut(M)$，即 $G\cong L_3(37)$。 证毕

定理2 如果有限群 G 满足 $G=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot19\cdot37$ 且 $scs(G)=5\cdot7\cdot11^3\cdot19$，则 $G\cong L_2(11^3)$。

证明 令 $x\in G$ 满足 $scs(G)=5\cdot7\cdot11^3\cdot19$。对任意元 $x\in G$，显然有 $Z(G)\leqslant C_G(x)$。因此比较群阶与最小共轭类长，有 $\{5,7,11,19\}\notin\pi(Z(G))$。

考虑 $\overline{G}=G/Z(G)$。对任一 $G_p\in Syl_p(G)$，其中 $p\in\pi(G)$，有 $|G_p|<scs(G)$。

由引理2有 $Soc(\overline{G})\lhd\overline{G}\leqslant Aut(Soc(\overline{G}))$ 且 $\overline{G}$ 的每个极小正规子群不可解。令 $M=Soc(\overline{G})$，那么 $M=S_1\times S_2\times\cdots\times S_k$，其中 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是非交换的单群。

笔者断言：$11\in\pi(M)$。

假设 $11\notin\pi(M)$，因为 $11\notin\pi(Z(G))$，所以 $7\in\pi(Out(M))$。根据表2和引理5有 3^{11} 能整除 $|M|$，这与 G 的阶是相矛盾的。因此，11必在 $\pi(M)$ 中。

因此由引理3知 M 可能同构于表2中含因子11的单群 $L_3(11),J_1,HN,L_2(11^3)$。因为 $M\lhd\overline{G}\leqslant Aut(M)$ 以及单群 $L_3(11),J_1,HN$ 中 $2^i\mid |M|\mid |G|$，其中 $i\geqslant3$，矛盾于 $G=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot19\cdot37$。故有 $M\cong L_2(11^3)\lhd\overline{G}\leqslant Aut(M)$，即 $G\cong L_2(11^3)$。 证毕

注 借助计算群论软件 MAGMA，得到 $L_3(37)$ 及 $L_2(11^3)$ 的共轭类长的集合 $cs(G)$，可参见文献[9]。

参考文献：

[1] Williams J S. Prime graph components of finite groups[J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487-513.

[2] Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. Atlas of finite groups[M]. London/New York: Clarendon Press(Oxford), 1985.

[3] Zavarnitsine A V. Finite simple groups with narrow prime spectrum[J]. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2009, 6: 1-12.

[4] Khukhro E I, Mazurov V D. Unsolved problems in group theory: the kourovka notebook(17th edition)[M]. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2010.

[5] Chen G Y. Further reflections on Thompson's conjecture[J]. Journal of Algebra, 1999, 218: 276-285.

[6] Li J B. Finite groups with special conjugacy class sizes or generalized permutable subgroups[D]. Chongqing: Southwest University, 2012.

[7] Chen Y H, Chen G Y. Recognition of A_{10} and $L_4(4)$ by two special conjugacy class sizes[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012, 29: 387-394.

[8] Robinson D J S. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

[9] Bosma W, Cannon J, Playoust C. Magma Algebra system I: the user language[J]. J Symbolic Comput, 1997, 24: 235-265.

Characterization of the Projective Special Linear Group of $L_3(37)$ and $L_2(11^3)$ by Their Smallest Conjugacy Class Size

YU Dapeng[1], LI Jinbao[1], MA Jicheng[1], ZHANG Liangcai[2]

(1. Department of Mathematics, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan Chongqing 402160;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: It is interesting to characterize finite simple groups by their quantitative characteristics. In this paper, the authors have characterized two finite nonabelian simple groups with 6 and 7 prime factors by their orders and their smallest conjugacy class sizes greater than one. More precisely, we show that $L_3(37)$ and $L_2(11^3)$ can be characterized by their orders and their smallest conjugacy class sizes greater than one.

Key words: finite simple group; the smallest conjugacy class size greater than one; characterization

(责任编辑 游中胜)