DOI:10.11721/cqnuj20150501

关于线性张量积问题拟多项式易处理性的一个注记*

齐 宗 会
(天津商业大学 宝德学院，天津 300384)

摘要:线性张量积问题的易处理性研究是多元问题易处理性研究的最主要实例。有研究给出了多元问题易处理性的概念,在最坏情形下研究了 d 维张量积逼近问题,并给出了线性张量积问题具有拟多项式易处理性的一个充要条件。但其证明涉及了 T 易处理性的很多难以检验的性质。因此应用了线性张量积问题的信息复杂性估计式和一般线性问题具有拟多项式易处理性的一个具体量化表达式,对其充要条件给出了一个极其简单直观的证明。

关键词:拟多项式;易处理性;线性张量积问题;特征值

中图分类号:O174.41　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)05-0088-03

多元计算问题是指定义在多个变量的函数类上的算子的逼近问题。多元问题在很多领域都有广泛的应用,如金融数学、统计学、物理学等。这类问题通常基于有限信息算子来构造算法来解决。一个信息算子是指计算一个函数值或者计算一个连续性泛函的值。为找到一个误差小于 ε 的解而需要的信息算子的最小数量与信息算子的选择和算法的构造无关,这个量被定义为信息复杂性,并记作 $n(\varepsilon,d)$。至少需要 $n(\varepsilon,d)$ 个信息算子才能得出问题小于 ε 的解,因此 $n(\varepsilon,d)$ 是刻画问题本身难度的指标。

有关多元连续问题易处理性的研究始于 1994 年[1]。易处理性研究的目的是寻找 $n(\varepsilon,d)$ 与 ε^{-1} 和 d 的函数关系,如果信息复杂性是一个关于 ε^{-1} 和 d 的指数函数,则称问题是不易处理的,否则就称为易处理的。在最坏框架和平均框架下,基于不同的误差标准,多元问题的易处理性已有很多研究,有关易处理性的各种概念已在文献中给出。事实上,多元问题的易处理性近年来已成为一个热门的研究领域[2-4]。

拟多项式易处理性的概念文献[5]已给出,主要涉及线性张量积问题,根据文献[2-4]给出以下概念。

设 S_d 是给定线性算子 S_1 的一个 d 重张量积,特别地,当 $d=1$ 时,令 H_1 表示可分的 Hilbert 空间,其函数定义在 $D_1\subset\mathbf{R}^m$ 上,G_1 表示任意可分的 Hilbert 空间。记 $S_1:H_1\to G_1$ 为一个紧线性算子,$S_1^*:G_1\to H_1$ 为 S_1 的共轭算子,则非负自共轭算子 $W_1:=S_1^*S_1:H_1\to H_1$ 也是紧的。记 $\{\lambda_j\}_{j\in N}$ 为 W_1 的递减特征值序列,如果 W_1 仅有有限个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$,就令 $\lambda_j=0(j\geqslant k)$,无论何种情况,特征值 λ_j 均收敛于零。不失一般性,假设 S_1 不是零算子,并假设 $\lambda_1=1$,因此 $1=\lambda_1>\lambda_2>\cdots>0$。

当 $d\geqslant 2$ 时,令 $H_d=H_1\otimes\cdots\otimes H_1$ 表示 Hilbert 空间 H_1 的 d 重张量积,其函数定义在 $D_d=D_1\times\cdots\times D_1\subset\mathbf{R}^{dm}$ 上,类似地,令 $G_d=G_1\otimes\cdots\otimes G_1$,则线性算子 $S_d=S_1\otimes\cdots\otimes S_1:H_d\to G_d$。此时,$S_d$ 的特征值集合为 $\lambda_{d,j}=\prod_{k=1}^{d}\lambda_{j,k}$,$j=[j_1,j_2,\cdots,j_d]\in N$。

称线性多元问题 $S=\{S_d\}$ 为线性张量积问题。

对任意 $\varepsilon\in(0,1)$,$d\in N$,称 $n(\varepsilon,d)$ 为信息复杂性,它表示在最坏情形或平均情形下,基于绝对或归一化误差标准,为得到 S_d 的 ε 逼近所需要的线性泛函的最小个数。将特征值序列重排 $\{\lambda_{d,j}\}_{j\in N_d}=\{\lambda_{d,s}\}_{s\in N}$ 使得 $\lambda_{d,1}\geqslant\lambda_{d,2}\geqslant\cdots\geqslant 0$。由文献[2]可知,多元问题 S_d 的信息复杂性

$$n(\varepsilon,d)=\min\{n\,|\,\lambda_{d,n+1}\leqslant\varepsilon^2 CRI_d\},\text{其中}\begin{cases}CRI_d=1,\text{绝对误差标准},\\ CRI_d=\lambda_{d,1},\text{归一化误差标准}。\end{cases}$$

称 S 是拟多项式易处理的,若存在正数 C 和 t 使得 $n(\varepsilon,d)\leqslant C\exp(t(1+\ln d)(1+\ln\varepsilon^{-1}))$,$d=1,2,\cdots$,$\varepsilon\in$

* **收稿日期**:2014-11-26　**修回日期**:2015-05-18　**网络出版时间**:2015-05-15 12:52
资助项目:国家自然科学基金(No. 11301385);天津商业大学宝德学院教学研究项目(No. BD20149206)
作者简介:齐宗会,女,讲师,研究方向为插值法与逼近论,E-mail:qzh_2007_lovely@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1252.030.html

(0,1)。

文献[5]基于递减特征值$\{\lambda_j\}_{j\in N}$讨论了S的拟多项式易处理性，但其证明涉及了T易处理性的很多性质，而这些性质很难检验，所以本文针对该问题给出一个简单直观的证明。在平均情形下的相应结论见文献[6]。

定理　在最坏情形下，基于绝对和归一化误差标准，考虑线性张量积问题$S=\{S_d\}$，则S是拟多项式易处理的充要条件为存在正数C和β，使得$\lambda_j\leqslant Cj^{-\beta}$。

1　定理证明

为了证明定理先给出两个引理[7]。

引理1　在最坏情形下，基于绝对误差标准，考虑线性张量积问题$S=\{S_d\}$。则S是拟多项式易处理的充要条件为存在正数C、非负的q和$\delta\in(0,1)$，使得

$$\sup_{d\in N}\frac{1}{\ln_+ d}\sum_{j=[Cd^q]}^{\infty}\lambda_{d,j}j^{\frac{\delta}{\ln_+ d}-1}<\infty,\tag{1}$$

这里及以下$[x]$表示不超过x的最小整数，而$\ln_+ x:=\max(1,\ln x)$。

引理2　在最坏情形下，基于归一化误差标准，考虑线性张量积问题$S=\{S_d\}$。则S是拟多项式易处理的充要条件为若存在$\delta\in(0,1)$使得

$$\sup_{d\in N}\frac{1}{\ln_+ d}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{d,j}j^{\frac{\delta}{\ln_+ d}-1}<\infty。\tag{2}$$

证明　(定理)因为$\lambda_{d,1}=1$，所以可以同时考虑绝对误差和归一化化误差标准。

充分性。假设存在正数C和β，使得$\lambda_j\leqslant Cj^{-\beta}$。不失一般性，假设$C=1$，(否则很容易找到$\beta'>0$使得$\lambda_j\leqslant j^{-\beta'}$，然后用$\beta'$代替$\beta$即可)。由文献[2]可知，对于任意的$s_d>1$(后面将会被选到)有

$$n(\varepsilon,d)\leqslant\zeta(s_d)^{d-1}\varepsilon^{-\frac{2s_d}{\beta}}。\tag{3}$$

这里$\zeta(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^{-x}$为黎曼zeta函数，仅在$x>1$时有定义。由(3)式可得

$$\lambda_{[\zeta(s_d)^{d-1}\varepsilon^{-\frac{2s_d}{\beta}}]+1}\leqslant\varepsilon^2。\tag{4}$$

类似文献[5]的证明，假设$k=[\zeta(s_d)^{d-1}\varepsilon^{-\frac{2s_d}{\beta}}]+1$。如果$\varepsilon\in(0,1]$，则$k=[\zeta(s_d)^{d-1}]$，$[\zeta(s_d)^{d-1}]+1,\cdots$，仍有$k\leqslant\zeta(s_d)^{d-1}\varepsilon^{-\frac{2s_d}{\beta}}$，这与$\varepsilon^2\leqslant\zeta(s_d)^{\frac{\beta(d-1)}{s_d}}k^{-\frac{\beta}{s_d}}$是等价的。因此对于所有的$k\geqslant[\zeta(s_d)^{d-1}]$都有

$$\lambda_{d,k+1}\leqslant\zeta(s_d)^{\frac{\beta(d-1)}{s_d}}k^{-\frac{\beta}{s_d}}。\tag{5}$$

令$s_d=5\ln_+ d$，则

$$\zeta(5\ln_+ d)=1+\frac{1}{2^{5\ln_+ d}}+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j^{5\ln_+ d}}\leqslant 1+\frac{1}{2^{5\ln_+ d}}+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{5\ln_+ d}}\mathrm{d}x=$$

$$1+\frac{1}{2^{5\ln_+ d}}+\frac{1}{(5\ln_+ d-1)2^{5\ln_+ d-1}}\leqslant 1+\frac{2}{2^{4\ln d}}=1+\frac{2}{d^{4\ln 2}}。\tag{6}$$

由(6)式，经过简单计算可得

$$\lim_{d\to\infty}\zeta(s_d)^{\frac{\beta(d-1)}{s_d}}=\lim_{d\to\infty}\zeta(s_d)^{d-1}=1。\tag{7}$$

由(5)，(7)式可知存在$M>1$，对于任意的$k\geqslant[M]$都有

$$\lambda_{d,k+1}\leqslant Mk^{-\frac{\beta}{5\ln_+ d}}\leqslant 2^{\beta}M(k+1)^{-\frac{\beta}{5\ln_+ d}}。\tag{8}$$

令引理1中的$C=M$，$q=0$，$\delta=\dfrac{\beta}{10}$，可得

$$\sum_{j=[Cd^q]+1}^{\infty}\lambda_{d,j}j^{\frac{\delta}{\ln_+ d}-1}\leqslant 2^{\beta}M\sum_{j=[M]+1}^{\infty}j^{-\frac{\beta}{10\ln_+ d}-1}\leqslant 2^{\beta}M\int_1^{+\infty}x^{-\frac{\beta}{10\ln_+ d}-1}\mathrm{d}x=\frac{10\cdot 2^{\beta}M\ln_+ d}{\beta}。\tag{9}$$

由(9)式可得

$$\sup_{d\in N}\frac{1}{\ln_+ d}\sum_{j=[Cd_q]+1}^{\infty}\lambda_{d,j}j^{\frac{\delta}{\ln_+ d}-1}\leqslant\frac{10\cdot 2^{\beta}M}{\beta}<\infty。\tag{10}$$

必要性。假设S是拟多项式易处理的，由引理2和$\lambda_{d,1}=1$可知，存在$\delta\in(0,1)$使得

$$\sup_{d\in N}\frac{1}{\ln_+ d}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{d,j}j^{\frac{\delta}{\ln_+ d}-1}<\infty\text{。}\tag{11}$$

令 $d=1$,由(11)式和 $\lambda_{1,j}=\lambda_j$ 可知

$$M=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j j^{\delta-1}<+\infty\text{。}\tag{12}$$

由(12)式可得对任意 $k\in N$ 有

$$\frac{\lambda_k k^{\delta-1}}{\delta}=\lambda_k\int_1^k x^{\delta-1}\mathrm{d}x\leqslant\lambda_k\sum_{j=1}^{k}j^{\delta-1}\leqslant\sum_{j=1}^{k}\lambda_j j^{\delta-1}\leqslant M\text{。}\tag{13}$$

由(13)式可得 $\lambda_k\leqslant(\lambda_k+M\delta)k^{-\delta}\leqslant(1+M\delta)k^{-\delta}$。 证毕

参考文献:

[1] Woźniakowski H. Tractability and strong tractability of multivariate tensor product problems[J]. Computing and Information,1994,4:1-19.

[2] Novak E,Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems,vol I:linear information[M]. Zurich:European Mathematical Society Publishing House,2008.

[3] Novak E,Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems,vol. II:standard information for functionals [M]. Zurich:European Mathematical Society Publishing House,2010.

[4] Novak E,Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems,vol III:standard information for operator[M]. Zurich:European Mathematical Society Publishing House,2012.

[5] Gnewuch M,Woźniakowski H. Quasi-polynomial tractability [J]. Journal of Complexity,2011,27(3/4):312-330.

[6] Xu G Q. Tractability of linear problems in the average case setting[J]. Journal of Complexity,2014,30(1):54-68.

[7] Xu G Q. Tractability of linear problems defined over Hilbert spaces[J]. Journal of Complexity,2014,30(6):735-749.

A Note on Quasi-polynomial Tractability of Linear Tensor Problems

QI Zonghui

(College of Boustead,TianJin University of Commerce,Tianjin 300384,China)

Abstract:The tractability of linear tensor product problems is the most important example of multivariate problems tractable research. Recently,the concept of tractability of multivariate problems has been introduced by somebody;it also studies d-variate approximation problems in the worst case setting,and gives the necessary and sufficient conditions of quasi-polynomiao tractability of linear tensor product problems. But the proof involves lots of nature of T tractability which is difficult to test,so it is difficult to understand. In this paper,we give a very simple and intuitive proof of the necessary and sufficient conditions by using the information complexity estimation formula of linear tensor product problems which and a specific quantitative expression of general linear problem which have quasi-polynomiao tractability.

Key words:quasi-polynomial;tractability;linear tensor product problem;eigenvalue

(责任编辑 黄 颖)