DOI:10.11721/cqnuj20150511

一般状态空间马氏过程返回时的矩*

屈　聪，张水利

(平顶山学院 数学与信息科学学院，河南 平顶山 467000)

摘要: 对于离散时间一般状态空间马氏链,Meyn 和 Tweedie 证明了返回时的矩与漂移条件等价,并用于研究马氏链的正则性和遍历性。本文对马氏过程返回时的矩进行了研究,给出了返回时矩的递推关系,利用最小非负解方法,得到了马氏过程返回时的矩是相应方程的最小非负解,以及马氏过程的漂移条件等价于矩条件。

关键词: 马氏过程;返回时;最小非负解

中图分类号: O211.62　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2015)05-0091-03

1 主要结果

已有许多学者对马氏过程返回时的矩进行了研究,如 Meyn 和 Tweedie[1] 研究了离散时间一般状态空间马氏链,证明了返回时的矩与漂移条件等价;何声武[2] 研究了离散时间可数状态空间马氏链,得到了返回时的矩是相应方程的最小非负解;王梓坤[3] 对连续时间马氏链的积分型泛函的矩进行了研究;李俊平等[4] 对 Markov 骨架过程积分型泛函的分布与矩进行了研究,并得到了生灭过程、Doob 过程积分型泛函的分布与矩的公式;来向荣[5] 对非齐次生灭过程的积分型泛函进行了研究,得到了一些递推公式;陈柳鑫等[6] 对非齐次 (H,Q) 过程积分型泛函的分布与矩进行了研究,并得到了分布与矩的具体计算公式;唐有荣等[7] 对半马氏过程的积分型泛函的矩进行了研究;吴立德[8] 研究了齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布;Meyn 和 Tweedie[9] 研究了一般状态空间马氏过程的返回时的矩,得到了马氏过程是 Harris 常返的充要条件。

设 $(E,\mathfrak{J})$ 是波兰空间,$\{X_t,t\in\mathbf{R}_+\}$ 是 $(E,\mathfrak{J})$ 上轨道右连续的时齐马氏过程,其转移概率函数为 $\{P(t,x,A),t\in\mathbf{R}_+,x\in E,A\in\mathfrak{J}\}$(相应半群为 $\{P^t\}$),即 $P(t,x,A)=P(X_t\in A\mid X_0=x)$。

条件 C_0　存在一个非空集合 C,常数 $\delta>0$,满足 $X_t\notin C,\forall t\in(\delta,2\delta]$。

定义 1　对任意的 $A\in\mathfrak{J}$,常数 $\delta>0$,令 $\tau_A(\delta)=\inf\{t\geqslant\delta:X_t\in A\}$,则 $\tau_A(\delta)$ 为马氏过程 $\{X_t,t\in\mathbf{R}_+\}$ 在时间 δ 后首次返回集合 A 的时刻,简称为返回时。

定理 1　设 $\{X_t,t\in\mathbf{R}_+\}$ 是 $(E,\mathfrak{J})$ 上满足条件 C_0 的马氏过程,则 $\{E_x[\tau_C(\delta)],x\in E\}$ 是方程

$$V(x)=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)V(y)+\delta,x\in E \tag{1}$$

的最小非负解。

推论 1　$\{E_x[\tau_C(\delta)],x\in C^c\}$ 是方程 $V(x)=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)V(y)+\delta,x\in C^c$ 的最小非负解。

定理 2　设 $\{X_t,t\in\mathbf{R}_+\}$ 是 $(E,\mathfrak{J})$ 上满足条件 C_0 的马氏过程,则下列条件等价

(i) 存在非负函数 V,满足方程

$$\begin{cases}\Delta_\delta V(x)\leqslant-\delta,x\in C^c,\\ \sup\limits_{x\in C}\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)V(y)<\infty,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Delta_\delta V(x)=\int_E P(\delta,x,\mathrm{d}y)V(y)-V(x)$。

(ii) $\sup\limits_{x\in C}E_x[\tau_C(\delta)]<\infty$。

* **收稿日期:** 2014-06-06　**修回日期:** 2015-06-08　**网络出版时间:** 2015-05-15 12:44

资助项目: 河南省教育厅科学技术研究重点项目资助(No.14B110038)

作者简介: 屈聪,女,讲师,硕士,研究方向为概率论与数理统计,E-mail:qucong1981813@126.com

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1244.020.html

2 定义及引理

令 H 表示从 E 到 $\mathbf{R}_+=[0,\infty]$ 上的映射集合:$1\in H$,并且对单调递增极限及非负线性组合封闭,则 H 是凸锥。称 A 是从 H 到 H 的一个锥射,若 $A0=0,A(c_1f_1+c_2f_2)=c_1Af_1+c_2Af_2,\forall c_1,c_2\geqslant 0,f_1,f_2\in H$。令 $\Gamma=\{A:H\to H,A$ 是一个锥射,当 $f_n\in H,f_n\uparrow f\Rightarrow Af_n\uparrow Af\}$。

定义 2[10]　给定 $A\in\Gamma,g\in H$,称 f^* 为方程

$$f(x)=(Af)(x)+g(x),x\in E,\tag{3}$$

的最小非负解,若 f^* 满足(3)式且对任何满足(3)式的 $\tilde{f}\in H$,都有 $\tilde{f}(x)\geqslant f^*(x),x\in E$。

引理 1[10]　方程(3)的最小非负解存在并且唯一;而且最小非负解可以通过下面递推公式逼近:令 $f^{(0)}=0$,$f^{(n+1)}=Af^{(n)}+g,n\geqslant 0$,则当 $n\to\infty$ 时,$f^{(n)}\uparrow f^*$。

引理 2[10]　(局部化定理)设 U 是一个非负可测核,$\{f^*(x),x\in E\}$ 是方程 $f(x)=\int U(x,\mathrm{d}y)f(y)+g(x)$,$x\in E$ 的最小非负解,令 $G\subset E$ 且 $\{\tilde{f}^*(x),x\in G\}$ 是方程

$$f(x)=\int_G U(x,\mathrm{d}y)f(y)+\int_{G^c}U(x,\mathrm{d}y)f^*(y)+g(x),x\in G$$

的最小非负解,则有 $\tilde{f}^*(x)=f^*(x),x\in G$。

引理 3[10]　设 $A,\tilde{A}\in\Gamma,g,\tilde{g}\in H$,满足 $\tilde{A}\geqslant A,\tilde{g}\geqslant g$,$f^*$ 是方程(3)的最小非负解,则方程 $\tilde{f}\geqslant\tilde{A}\tilde{f}+\tilde{g}$,$\tilde{f}\in H$ 的任意解 $\tilde{f}$,都有 $\tilde{f}\geqslant f^*$。

令　$$G_C(x,\delta)=E_x[\tau_C(\delta)],\tau_C^{(n)}(\delta)=\min\{\tau_C(\delta),n\delta\},G_C^{(n)}(x,\delta)=E_x[\tau_C^{(n)}(\delta)],n\geqslant 1,$$
则当 $n\to\infty$ 时,有 $\tau_C^{(n)}(\delta)\uparrow\tau_C(\delta)$。由单调收敛定理,有 $\lim\limits_{n\to\infty}G_C^{(n)}(x,\delta)=G_C(x,\delta)$。

引理 4　设 $\{X_t,t\in\mathbf{R}_+\}$ 是 $(E,\mathfrak{F})$ 上满足条件 C_0 的马氏过程,则有下面的递推公式

$$G_C^{(1)}(x,\delta)=\delta,\tag{4}$$

$$G_C^{(n+1)}(x,\delta)=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)G_C^{(n)}(y,\delta)+\delta,n\geqslant 1。\tag{5}$$

证明　注意到 $\tau_C(\delta)\geqslant\delta$,故 $\tau_C^{(1)}(\delta)=\min\{\tau_C(\delta),\delta\}=\delta$,所以 $G_C^{(1)}(x,\delta)=E_x[\tau_C^{(1)}(\delta)]=\delta$。用 θ 表示通常的漂移算子,注意到在条件 C_0 成立的情形下,当 $\tau_C(\delta)>\delta$ 时,有 $\tau_C(\delta)=\theta^\delta\tau_C(\delta)+\delta$。因此:

$$\tau_C^{(n+1)}(\delta)I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}=\min\{\theta^\delta\tau_C(\delta)+\delta,(n+1)\delta\}I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}=\{\theta^\delta\tau_C^{(n)}(\delta)+\delta\}I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}},n\geqslant 1。$$

由马氏性,对任意的 $n\geqslant 1$,有

$$G_C^{(n+1)}(x,\delta)=E_x[\tau_C^{(n+1)}(\delta)]=E_x[\tau_C^{(n+1)}(\delta)I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}]+E_x[\tau_C^{(n+1)}(\delta)I_{\{\tau_C(\delta)=\delta\}}]=$$
$$E_x[\theta^\delta\tau_C^{(n)}(\delta)I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}]+\delta E_x[I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}]+\delta E_x[I_{\{\tau_C(\delta)=\delta\}}]=E_x[I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}E_x[\theta^\delta\tau_C^{(n)}(\delta)|X_\delta]]+\delta=$$
$$E_x[I_{\{\tau_C(\delta)>\delta\}}E_{X_\delta}[\tau_C^{(n)}(\delta)]]+\delta=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)G_C^{(n)}(y,\delta)+\delta。$$

3 主要结果的证明

证明　(定理1)令 $V^{(0)}(x)=0$,则

$$V^{(n+1)}(x)=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)V^{(n)}(y)+\delta,n\geqslant 0。\tag{6}$$

下面利用归纳法证明,对任意的 $n\geqslant 1,x\in E$,都有

$$V^{(n)}(x)=G_C^{(n)}(x,\delta)。\tag{7}$$

当 $n=1$ 时,由(4)式,有 $V^{(1)}(x)=\delta=G_C^{(1)}(x,\delta),x\in E$,即 $n=1$ 时,(7)式成立。

假设 $n=k>1$ 时,(7)式成立,即 $V^{(k)}(x)=G_C^{(k)}(x,\delta)$。由(5),(6)式可知:

$$V^{(k+1)}(x)=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)V^{(k)}(y)+\delta=\int_{C^c}P(\delta,x,\mathrm{d}y)G_C^{(k)}(y,\delta)+\delta=G_C^{(k+1)}(x,\delta),$$

即 $n=k+1$ 时,(7)式仍然成立。由引理1,方程(1)的最小非负解为

$$V^*(x)=\lim_{n\to\infty}V^{(n)}(x)=\lim_{n\to\infty}G_C^{(n)}(x,\delta)=G_C(x,\delta)=E_x[\tau_C(\delta)],x\in E。$$
证毕

证明　(推论1)由定理2和引理3,易知结论成立。　证毕

证明　(定理2)(i)$\Rightarrow$(ii)。令 $\tilde{V}(x)=\begin{cases}E_x[\tau_C(\delta)],x\in C^c,\\0,x\in C。\end{cases}$ 当 $x\in C^c$ 时,由定理1可知

$$\Delta_\delta \widetilde{V}(x)=\int_E P(\delta,x,\mathrm{d}y)\widetilde{V}(y)-\widetilde{V}(x)=\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)E_y[\tau_C(\delta)]-E_x[\tau_C(\delta)]=-\delta。\tag{8}$$

由推论 1 及引理 3 可知，$\{\widetilde{V}(x),x\in E\}$是方程(2)的最小非负解。由条件(i)成立，有

$$\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)E_y[\tau_C(\delta)]=\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)\widetilde{V}(y)\leqslant\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)V(y)<\infty。$$

由定理 1 及上式，则有

$$\sup_{x\in C} E_x[\tau_C(\delta)]=\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)E_y[\tau_C(\delta)]+\delta<\infty。\tag{9}$$

(ii)⇒(i)。设$\sup\limits_{x\in C} E_x[\tau_C(\delta)]<\infty$，由(9)式有

$$\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)\widetilde{V}(y)=\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(\delta,x,\mathrm{d}y)E_y[\tau_C(\delta)]<\infty。\tag{10}$$

由(8)式可知

$$\Delta_\delta\widetilde{V}(x)\leqslant-\delta,x\in C^c。\tag{11}$$

由(10),(11)式可知，非负函数$\{\widetilde{V}(x),x\in E\}$满足方程(2)。　证毕

参考文献：

[1] Meyn S P, Tweedie R L. Markov chains and stochastic stability[M]. London: Springer-Verlag, 1992.

[2] 何声武. 随机过程引论[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
He S W. An introduction to stochastic process[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999.

[3] 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链[M]. 第二版. 北京:科学出版社,2004.
Wang Z K. Birth-death processes andMarkov chains[M]. Second Edition. Beijing: Science Press, 2004.

[4] 李俊平,侯振挺. Markov 骨架过程积分型泛函的分布与矩及其应用举例[J]. 应用数学学报,2001,24(2):277-283.
Li J P, Hou Z T. The distributions and moments of integral type functional for Markov skeleton Processes and their applications[J]. Acta Mathematicsae Applicatae Sinica, 2001,24(2):277-283.

[5] 来向荣. 非齐次生灭过程的积分型泛函[J]. 工程数学学报,1994,11(2):69-75.
Lai X R. Functional of integral type of nonhomogeneous birth-death processes[J]. Journal of Engineering Mathematics, 1994, 11(2):69-75.

[6] 陈柳鑫,李俊平,侯振挺. 非齐次(H,Q)过程的积分型泛函的分布与矩[J]. 长沙铁道学院学报,2000,18(3):81-85.
Chen L X, Li J P, Hou Z T. The distributions and moments of integral-type functional for nonhomogeneous (H, Q) processes[J]. Journal of Changsha Railway University, 2000,18(3):81-85.

[7] 唐有荣,刘再明,侯振挺. 半马氏过程的积分型随机泛函[J]. 数学年刊,1999,20A(5):553-558.
Tang Y R, Liu Z M, Hou Z T. Functional of integral type of the semi-Markov chains[J]. Chinese Annals of Mathematics, 1999, 20A(5):553-558.

[8] 吴立德. 齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布[J]. 数学学报,1963,13(1):86-93.
Wu L D. The distributions of integral-type functional for homogeneous denumerable Markov processes[J]. Acta Mathematica Sinica, 1963, 13(1):86-93.

[9] Meyn S P, Tweedie R L. Generalize resolvents and Harris recurrence of Markov processes[J]. Contemp Math, 1992, 149:227-250.

[10] Chen M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. Second edition. Singapore: World Scientific, 2004.

The Moment of Return Time for Markov Processes on General State Space

QU Cong, ZHANG Shuili

(Institute of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan Henan 467000, China)

Abstract: For discrete-time Markov chains on general state space, Meyn and Tweedie given the equivalence between the moments of return time and drift condition, and applied to regularity and ergodicity of Markov chains. In this paper, we research the moments of return time for Markov processes, given the recursive relation on the moments of return time, and obtain the minimal nonnegative solutions to the corresponding equation is the moments of return time, the equivalence between the moments of return time and drift condition of Markov processes , by the method of minimal nonnegative solutions.

Key words: Markov processes; return time; minimal nonnegative solutions

(责任编辑　黄　颖)