DOI:10.11721/cqnuj20160103

指数分布极值的分布和矩的渐近展开*

黄建文，刘衍民，罗国旺，任泽容
(遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义 563002)

摘要:研究了指数分布规范化最大值的分布和矩的渐近性质,并在最优赋范常数的条件下得到了指数分布规范化最大值的分布和矩的渐近展开,这些展开能够用来得到规范化最大值的分布和矩趋于相应的极值的分布和矩的收敛速度。

关键词:渐近展开;矩;极值;指数分布

中图分类号:O211.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)01-0063-04

设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是一列独立同分布的随机变量序列,其共同的分布是参数为$\lambda(>0)$的指数分布(或者寿命分布),记为$X_n\sim\exp(\lambda)$。记$M_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{X_k\}$表示随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$的部分最大值。指数分布的概率密度定义为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0\\0,x\leqslant 0\end{cases}$,其中参数$\lambda>0$。$F(x)$为指数分布的分布函数。

指数分布(或者寿命分布)在概率论与数理统计的理论与应用中都起着很重要的作用。它的应用太多而不胜枚举。选择的一些仅仅出现在过去一年的应用包括:模拟寿命数据[1];分析时滞切换系统的 ODE[2];模拟震级分布[3];分析具有离散和分布时滞的中立型的随机神经网络[4];假定产品寿命服从双参数指数分布时,利用线性的降解模型模拟降解过程[5];模拟中度负相依数据[6]等等。

近些年,有关指数分布规范化最大值的渐近性质已经在一些文献中作了相关的研究[7-12]。文献[7]研究了指数分布规范化最大值的一致收敛速度。文献[8]得到混合指数分布极值的一致收敛速度。文献[9]研究了广义指数分布和混合广义指数的极限分布以及相应的收敛速度。文献[10-11]研究了极值的矩收敛问题。下面将研究指数分布规范化最大值的分布和矩的高阶渐近展开。极值理论领域的学者知道,指数分布$F\in D(\Lambda)$,即存在赋范常数$a_n>0$和$b_n\in\mathbf{R}$使得

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant a_nx+b_n)=\Lambda(x),\tag{1}$$

其中$\Lambda(x)=\exp(-\exp(-x))$,常数$a_n=\lambda^{-1}$,$b_n=\lambda^{-1}\log n$。

指数分布的尾部表示为

$$1-F(x)=e^{-\lambda x}=\lambda^{-1}f(x)=\exp(-\lambda)\exp\left(-\int_1^x\frac{1}{\tilde{f}(t)}dt\right),x>0,\tag{2}$$

其中$\tilde{f}(t)=\lambda^{-1}$。注意到当$t\to\infty$时,$\tilde{f}'(t)\to 0$。根据文献[12]的命题1.1(a)和推论1.7,可以选择赋范常数a_n和b_n使其满足以下的方程:

$$1-F(b_n)=n^{-1},a_n=\tilde{f}(b_n),\tag{3}$$

且在以上的赋范常数下,(1)式成立。

1 主要结果

在这一部分给出主要结果。定理1给出了指数分布的规范化最大值的分布的高阶渐近展开;定理2提供了指数分布的规范化最大值分布的矩的渐近展开。

* **收稿日期**:2015-03-01　**修回日期**:2015-10-21　**网络出版时间**:2015-12-02 13:29

资助项目:国家自然科学基金(No.71461027);贵州省科技合作计划课题(No.黔科合LH字[2015]7001;No.黔科合LH字[2015]7006;No.黔科合LH字[2015]7055;贵州省自然科学基金(No.黔教合KY[2014]295)

作者简介:黄建文,男,讲师,研究方向为极值统计分析,E-mail:hjw1303987297@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1329.058.html

定理1 设 $F(x)$ 表示指数分布的分布函数。赋范常数 $a_n=\lambda^{-1}$，$b_n=\lambda^{-1}\log n$，当 $n\to\infty$ 时，则

$$e^{\lambda b_n}\left[e^{\lambda b_n}(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)\right]\to(w(x)+2^{-1}k^2(x))\Lambda(x),\tag{4}$$

其中 $k(x)=-2^{-1}e^{-2x}$，$w(x)=-3^{-1}e^{-3x}$。

注1 由(3)式，可得 $e^{\lambda b_n}=n$。因此，定理1表明指数分布的最大值的分布 $F^n(a_nx+b_n)$ 收敛到其极值分布 $\Lambda(x)$ 的速度是与 n^{-1} 成正比的。

在这里，对于非负整数 r，令 $m_r(n)=E\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\right)^r=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\mathrm{d}F^n(a_nx+b_n)$ 和 $m_r=EX^r=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\mathrm{d}\Lambda(x)$ 分别表示 $\frac{M_n-b_n}{a_n}$ 和 $X\sim\Lambda(x)$ 的 r 阶矩，并且赋范常数 a_n 和 b_n 由(3)式给出。

定理2 在定理1的条件下，当 $n\to\infty$ 时，则

$$e^{\lambda b_n}\left[e^{\lambda b_n}(m_r(n)-m_r)-2^{-1}re^{-x}m_{r-1}\right]\to\frac{1}{8}r(r-1)(r-2)(r-3)m_{r-4}-\frac{5}{12}r(r-1)(r-2)m_{r-3}-\frac{3}{8}r(r-1)m_{r-2}-\frac{1}{12}rm_{r-1}。\tag{5}$$

记 $\Delta_r(n)=E\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\right)^r-\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\mathrm{d}\Lambda(x)$。

注意到 $e^{\lambda b_n}=n$，从而，由定理2可得如下所述的矩的收敛速度。

推论1 对于指数分布规范化最大值的矩，当 n 充分大时，则 $\Delta_r(n)\sim2^{-1}rn^{-1}e^{-x}m_{r-1}$。

2 辅助引理

为了证明主要结果，下面给出几个必要的引理。

引理1 赋范常数 $a_n=\lambda^{-1}$，$b_n=\lambda^{-1}\log n$，令 $h_\lambda(n,x)=n\log F(a_nx+b_n)+e^{-x}$，则

$$\lim_{n\to\infty}e^{\lambda b_n}\left[e^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x)\right]=w(x),\tag{6}$$

其中，$k(x)$ 和 $w(x)$ 的定义见定理1。

证明 在赋范常数 $a_n=\lambda^{-1}$，$b_n=\lambda^{-1}\log n$ 的条件下，指数分布的最大值分布的极限分布为

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\leqslant x\right)=\lim_{n\to\infty}F^n(a_nx+b_n)=\Lambda(x)。$$

因此，由(2)，(3)式可得

$$\lim_{n\to\infty}e^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log F(a_nx+b_n)+n^{-1}e^{-x}}{n^{-1}e^{-\lambda b_n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-(1-F(a_nx+b_n))^2(1+o(1))}{2n^{-1}e^{-\lambda b_n}}+\frac{-(1-F(a_nx+b_n))+(1-F(b_n))e^{-x}}{n^{-1}e^{-\lambda b_n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-(1-F(a_nx+b_n))^2(1+o(1))}{2n^{-1}e^{-\lambda b_n}}=-2^{-1}e^{-2x}=k(x),\tag{7}$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}e^{\lambda b_n}\left[e^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log F(a_nx+b_n)+n^{-1}e^{-x}}{n^{-1}e^{-2\lambda b_n}}-e^{\lambda b_n}k(x)\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-(1-F(a_nx+b_n))+(1-F(b_n))e^{-x}}{n^{-1}e^{-2\lambda b_n}}-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1-F(a_nx+b_n))^2}{2n^{-1}e^{-2\lambda b_n}}+e^{\lambda b_n}k(x)\right]=$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{(1-F(a_nx+b_n))^3(1+o(1))}{3n^{-1}e^{-2\lambda b_n}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{(1-F(a_nx+b_n))^3(1+o(1))}{3n^{-1}e^{-2\lambda b_n}}=-3^{-1}e^{-3x}=w(x)。\tag{8}$$

引理2 对于任意常数 $0<c<1$ 和 $i\geqslant0$，则 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-cb_n^{1/2}}e^{2\lambda b_n}|x|^i\Lambda(x)\mathrm{d}x=0$，$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-cb_n^{1/2}}e^{\lambda b_n}|x|^ie^{-2x}\Lambda(x)\mathrm{d}x=0$，并且 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-cb_n^{1/2}}e^{2\lambda b_n}|x|^iF(a_nx+b_n)\mathrm{d}x=0$。

证明与文献[13]中的引理1和引理2证明类似。

引理3 设 $0<c<1$，对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$，则 $|h_\lambda(n,x)|<2$ 一致成立，其中，$h_\lambda(n,x)=n\log F(a_nx+b_n)+e^{-x}$，赋范常数 $a_n=\lambda^{-1}$，$b_n=\lambda^{-1}\log n$。

证明　令 $\varphi(x)=1-F(a_n x+b_n)$ 且 $n\log F(a_n x+b_n)=-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)-R(x)$。由于当 $0<x<1$ 时,$-x-x^2/2-x^3/(3(1-x))<\log(1-x)<-x$,从而,$0<R(x)<3^{-1}n\varphi^3(x)(1-\varphi(x))$。因此,有:

$$|h_\lambda(n,x)|<|-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)+\mathrm{e}^{-x}|+R(x)。\tag{9}$$

对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,则 $\varphi(x)<\varphi(-cb_n^{1/2})=1-F(b_n-c\lambda^{-1}b_n^{1/2})<c_0<1$,其中 c_0 是一个常数并且 $0<c_0<1$,并且:

$$0<R(x)<\frac{1}{3(1-c_0)}\frac{(1-F(a_n x+b_n))^3}{1-F(b_n)}=(3(1-c_0))^{-1}\exp(-3x-2\lambda b_n)<(3(1-c_0))^{-1}\exp(-2\lambda b_n+3cb_n^{1/2})<1。\tag{10}$$

同理,对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,则

$$|-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)+\mathrm{e}^{-x}|=2^{-1}n\varphi^2(x)<2^{-1}\exp(-\lambda b_n+2cb_n^{1/2})<1。\tag{11}$$

所以,对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,由(9)～(11)式,可得 $|h_\lambda(n,x)|<2$ 一致成立。

引理 4　设 $r>0$,$0<c<1$,对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,

$$x^r\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(F^n(a_n x+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]$$

被与 n 独立的可积函数控制。

证明　由引理 3 可得,对于充分大的 n,则有

$$\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(F^n(a_n x+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]<\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x)]\Lambda(x)+$$
$$\mathrm{e}^{2\lambda b_n}h_\lambda^2(n,x)[2^{-1}+\exp(|h_\lambda(n,x)|)]\Lambda(x)<\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x)]\Lambda(x)+\mathrm{e}^{2\lambda b_n}h_\lambda^2(n,x)(2^{-1}+\mathrm{e}^2)\Lambda(x),$$

其中,$h_\lambda(n,x)=n\log F(a_n x+b_n)+\mathrm{e}^{-x}$。

下面,只证明 $\mathrm{e}^{\lambda b_n}(\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x))$ 被 $c_1\mathrm{e}^{-3x}$ 控制。注意到:

$$\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x)]=\mathrm{e}^{2\lambda b_n}[-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\lambda b_n}k(x)]-\mathrm{e}^{2\lambda b_n}R(x),\tag{12}$$

其中 $n\log F(a_n x+b_n)=-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)-R(x)$,$\varphi(x)=1-F(a_n x+b_n)$,$0<R(x)<\dfrac{n\varphi^3(x)}{(3(1-\varphi(x))}$,并且对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,则 $\varphi(x)<1-F(b_n-c\lambda^{-1}b_n^{1/2})<c_0<1$,从而,对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,由(10)式可得,

$$\mathrm{e}^{2\lambda b_n}R(x)<3^{-1}(1-c_0)^{-1}\mathrm{e}^{2\lambda b_n}\exp(-3x-2\lambda b_n)=3^{-1}(1-c_0)^{-1}\exp(-3x)=c_1\mathrm{e}^{-3x}。\tag{13}$$

其中,c_1 是一个常数并且 $0<c_1<1$。

由(2),(3)式可得,

$$\mathrm{e}^{2\lambda b_n}[-n\varphi(x)-2^{-1}n\varphi^2(x)+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\lambda b_n}k(x)]=$$
$$\mathrm{e}^{2\lambda b_n}\left[-\frac{1-F(a_n x+b_n)}{1-F(b_n)}-\frac{(1-F(a_n x+b_n))^2}{2(1-F(b_n))}+\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-\lambda b_n}\right]=0。\tag{14}$$

由(12)～(14)式可得,对于充分大的 n 和所有的 $x>-cb_n^{1/2}$,则 $\mathrm{e}^{\lambda b_n}(\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x))<c_1\mathrm{e}^{-3x}$。

3 主要结论的证明

证明(定理 1)　由(7)式,当 $n\to\infty$ 时,可得

$$h_\lambda(n,x)\to 0 \text{ 且 } \left|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{h_\lambda^{i-3}(n,x)}{i!}\right|<\exp(|h_\lambda(n,x)|)\to 1。\tag{15}$$

再由引理 1、(7)式和(15)式,可得

$$\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(F^n(a_n x+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]=\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(\exp(h_\lambda(n,x))-1)-k(x)]\Lambda(x)=$$
$$\left[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(\mathrm{e}^{\lambda b_n}h_\lambda(n,x)-k(x))+\mathrm{e}^{2\lambda b_n}h_\lambda^2(n,x)\left(2^{-1}+h_\lambda(n,x)\sum_{i=3}^{\infty}\frac{h_\lambda^{i-3}(n,x)}{i!}\right)\right]\Lambda(x)\to(w(x)+2^{-1}k^2(x))\Lambda(x)。$$

证毕

证明(定理 2)　对于 $r\geqslant 4$,由分部积分法可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{r-1}\mathrm{e}^{-3x}\Lambda(x)\mathrm{d}x=(r-1)(r-2)m_{r-3}-3(r-1)m_{r-2}+2m_{r-1}\tag{16}$$

并且:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{r-1}\mathrm{e}^{-4x}\Lambda(x)\mathrm{d}x = -(r-1)(r-2)(r-3)m_{r-4} + 6(r-1)(r-2)m_{r-3} - 11(r-1)m_{r-2} + 6m_{r-1}。 \tag{17}$$

由类似于文献[13]中(4.6)式的证明方法可得：

$$m_r(n) - m_r = -r\int_{-\infty}^{+\infty} x^{r-1}(F^n(a_n x + b_n) - \Lambda(x))\mathrm{d}x。 \tag{18}$$

由(16)～(18)式和引理 2～4 以及控制收敛定理，当 $n\to\infty$ 时，则

$$\mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}(m_r(n) - m_r) - 2^{-1}r\mathrm{e}^{-x}m_{r-1}] = -r\int_{-\infty}^{-c b_n^{1/2}} \mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}x^{r-1}(F^n(a_n x + b_n) - \Lambda(x)) - x^{r-1}k(x)\Lambda(x)]\mathrm{d}x -$$

$$r\int_{-c b_n^{1/2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda b_n}[\mathrm{e}^{\lambda b_n}x^{r-1}(F^n(a_n x + b_n) - \Lambda(x)) - x^{r-1}k(x)\Lambda(x)]\mathrm{d}x \to -r\int_{-\infty}^{+\infty}(w(x) + 2^{-1}k^2(x))x^{r-1}\Lambda(x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{8}r(r-1)(r-2)(r-3)m_{r-4} - \frac{5}{12}r(r-1)(r-2)m_{r-3} - \frac{3}{8}r(r-1)m_{r-2} - \frac{1}{12}rm_{r-1}。$$

证毕

参考文献：

[1] Tian Y Z, Tian M Z, Zhu Q Q. A new generalized linear exponential distribution and its applications[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2014, 30(4): 1049-1062.

[2] Bao L P, Fei S M, Yu L. Exponential stability of linear distributed parameter switched systems with time-delay[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2014, 27(2): 263-275.

[3] Mathias R. Modeling of magnitude distributions by the generalized truncated exponential distribution[J]. Journal of Seismology, 2015, 19(1): 265-271.

[4] Wang T, Ding Y S, Zhang L, et al. Delay-dependent exponential state estimators for stochastic neural networks of neutral type with both discrete and distributed delays[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(4): 670-680.

[5] Yu H F, Peng C Y. Designing a degradation test with a two-parameter exponential lifetime distribution[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2014, 43(8): 1938-1958.

[6] Mohsin M, Kazianka H, Pilz J, et al. A new bivariate exponential distribution for modeling moderately negative dependence[J]. Statistical Methods and Applications, 2014, 23(1): 123-148.

[7] Hall W J, Wellner J A. The rate of convergence in law of the maximum of an exponential sample[J]. Statstica Neerlandica, 1979, 33(3): 151-154.

[8] Peng Z X, Weng Z C, Nadarajah S. Rates of convergence of extremes for mixed exponential distributions[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2010, 81(1): 92-99.

[9] 刘姣姣,陈守全.广义指数分布随机变量序列最大值的收敛速度[J].西南大学学报:自然科学版,2013,35(5):89-92.
Liu J J, Chen S Q. Rates of convergence of extremes for generalized exponential distribtuion[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2013, 35(5): 89-92.

[10] Mc Cord J R. On asymptotic moments of extreme statistics[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35(4): 1738-1745.

[11] Pickands J. Moment convergence of sample extremes[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1968, 39(3): 881-889.

[12] Resnick S I. Extreme value, regular variation, and point processes[M]. New York: Springer, 1987.

[13] Liao X, Peng Z X, Nadarajah S. Asymptotic expansions for moments of skew-normal extremes[J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(5): 1321-1329.

Asymptotic Expansion of the Distribution and Moment of Extreme from Exponential Distribution

HUANG Jianwen, LIU Yanmin, LUO Guowang, REN Zerong

(School of Mathematics and Computational Science, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563002, China)

Abstract: In this paper, the asymptotic behaviors of the distribution and moment of normalized maxima for exponential distribution are studied. Under the optimal norming constants, the asymptotic expansions of the distribution and moment of normalized maxima for exponential distribution are derived. These expansions can be used to deduce the convergence rate of the distribution and moment of normalized maxima to the distribution and moment of the corresponding extreme value.

Key words: asymptotic expansion; moment; extreme value; exponential distribution

(责任编辑　黄　颖)