DOI:10.11721/cqnuj20160110

次正规子群与有限群的 p-超可解性*

黄　琼[1,2]，马百万[3]，黄薪达[4]，韦华全[5]，杨立英[1]

(1. 广西师范学院 数学与统计科学学院，南宁 530023；2. 广西体育运动学校，南宁 530012；3. 江苏省运河中学，江苏 徐州 221300；4. 广西大学 电气工程学院，南宁 530004；5. 广西大学 数学与信息科学学院，南宁 530004)

摘要：设群 G 有 p-可解正规子群 H 且满足 G/H 为 p-超可解群。证明：1)若 H 的 $Sylow$ p-子群 P 的极大子群在 G 中次正规，则 G 是 p-超可解；2) 若 $O_{p'}(H)$的极大子群包含于 $F_p(H)$中且在 G 中次正规，则 G 是 p-超可解群。

关键词：p-超可解群；次正规子群；$Sylow$ p-子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)01-0073-03

本文的术语和符号都是采用标准的，群是指有限群。

有限群的研究中，可解性和非可解性历来是研究者喜欢研究的性质。利用次正规的性质研究群的 p-超可解。上个世纪 30 年代末，Wielandt 的一篇关于次正规子群的文章[1]，在讨论那种存在合成群列的群时，首先便对次正规性做了深刻的研究。近几十年来，对这重要子群特性的研究又有了新的成果[2-4]。也对次正规性进行研究。具体地说，从有限群的 $Sylow$ p-子群出发，研究其极大子群的次正规性，从而得出有限群 p-超可解性。

1 定义及引理

定义 1[5]　设 G 是群，H 是 G 的子群，则 H 是 G 的次正规子群，并记作 $H\lhd\lhd G$，如果 H 在 G 的某个次正规群列中出现。

引理 1[6]　设 G 是群。则：1) 若 $H\lhd\lhd G$，$M\leqslant G$，则 $H\cap M\lhd\lhd M$；2) 若 $N\lhd G$，且 $H\lhd\lhd G$，则 $HN/N\lhd\lhd G/N$。

引理 2[7]　设 G 是群，$M<\cdot G$，G 的正规 p-子群 P 满足 $G=PM$，其中 $|G|$ 有素因子 p，则：1) $P\cap M\lhd G$；2) 若 $p>2$ 并且 P 的极小子群在 G 中正规，则 $|G:M|=p$。

引理 3[5]　设 G 是有限群，$H\lhd\lhd G$，$K\lhd\lhd G$，则$\langle H,K\rangle\lhd\lhd G$。

引理 4[7]　设 G 是 π-可分群，$\overline{G}=G/O_{\pi'}(G)$。则 $C_{\overline{G}}(O_\pi(\overline{G}))\leqslant O_\pi(\overline{G})$。特别地，若 $O_{\pi'}(G)=1$，则 $C_G(O_\pi(G))\leqslant O_\pi(G)$。

引理 5[7]　设 G 是群，$1\neq H\lhd G$ 且 $H\cap\varphi(G)=1$。则 $F(G)$是 G 的含于 $F(G)$的极小正规子群的直积。

2 主要结果

定理 1　设 G 是群，H 是 G 的 p-可解正规子群使得 G/H 为 p-超可解。若 H 的 $Sylow$ p-子群 P 的极大子群在 G 中次正规，则 G 是 p-超可解。

证明　设 G 是极小反例。则

1) $O_{p'}(G)=1$。

若 $N=O_{p'}(G)\neq 1$。设$\overline{G}=G/N$，$\overline{H}=HN/N$，$\overline{P}=PN/N\in Syl_p(\overline{H})$，$P_1<\cdot P$，$\overline{P}_1=P_1N/N$，则$\overline{P}_1<\cdot\overline{P}$。因 H 是 G 的 p-可解正规子群，故 H 的商群$\overline{H}=HN/N$ 为 p-可解正规子群。又因 G/H 为 p-超可解，则$\overline{G}/\overline{H}\cong$

---

* **收稿日期**：2015-01-19　**修回日期**：2015-10-20　**网络出版时间**：2015-12-02 13:29

资助项目：国家自然科学基金(No. 10961007；No. 11161006)；广西自然科学基金(No. 0991101；No. 0991102)；广西教育厅科研基金 2011 广西高校人才自主计划(No. 5070)；广西教育科学"十二五"规划 2015 年度自筹经费一般课题(No. 2015C313)

作者简介：黄琼，女，研究方向为群论，E-mail：418068066@qq.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1329.046.html

G/HN 为 p-超可解。因为 $P_1 \lhd\lhd G$，由引理1，$\overline{P}_1 \lhd\lhd \overline{G}$。于是$\overline{G}$满足定理的条件。由 G 之极小性知$\overline{G}$为 p-超可解群，故 G 也为 p-超可解群，矛盾。

2) $O_p(H) \cdot\lhd G, G/O_p(H)$ 为 p-超可解且 $O_p(H)$ 不小于或等于 $\varphi(G)$。

因为 H 为 p-可解，故 $O_{p'}(H) \neq 1$ 或 $O_p(H) \neq 1$。利用1)，有 $O_p(H) \neq 1$。设 $N \cdot\lhd G$ 且 $N \leqslant O_p(H)$，$P_1 <\cdot P$，则$\overline{G}=G/N, \overline{P}=P/N \in Syl_p(\overline{H}), \overline{P}_1=P_1/N <\cdot \overline{P}$，显然$\overline{G}/\overline{H} \cong G/H$ 为 p-超可解，其中$\overline{H}=H/N$。由于 $P_1 \lhd\lhd G$，由引理1，$\overline{P}_1 \lhd\lhd \overline{G}$。由上可知，$\overline{G}$满足归纳条件，从而可知$\overline{G}$是 p-超可解群。因 $N \leqslant G, N \cdot< O_p(H)$ 且 N 是 $O_p(H)$ 中唯一的极小正规子群，N 不小于或等于 $\varphi(G)$。故有 $M <\cdot G$ 使得 $G=NM$ 且 $N \cap M=1$。由引理2，$O_p(H) \cap M \lhd G$，故 $O_p(H) \cap M=1, N=O_p(H)$。

3) 导出矛盾。

在2)中 $N=O_p(H)$。根据2)存在 G 的极大子群 M 满足 $G=NM$ 且 $N \cap M=1$。如果 $P \cap M=P$，矛盾。因为 $O_p(H) \cap M=1$，故只有 $P \cap M<P$，于是可以取 P 的极大子群为 P_1，且 $P \cap M \leqslant P_1 <\cdot P$。因为 P_1 是 G 的次正规子群，故 $P_1 \lhd\lhd G$。

若 P 只有一个极大子群 P_1，则 P 为循环群，故 N 为初等交换循环群，即 $|N|=p$。类似地，可得 G 是 p-超可解群，矛盾。若 P 至少有两个不同的极大子群，则 P 为非循环群。

考虑 $O^p(G)$，如果 N 不小于或等于 $O^p(G)$，因为 $NO^p(G)/O^p(G) \cdot\lhd G/O^p(G)$，而 $G/O^p(G)$ 为 p-群，$N \cong NO^p(G)/O^p(G)$，因为 p-群的极小正规子群的阶为 p，故 N 为 p 阶循环群。由2)知 G 为 p-超可解群。矛盾。

所以只能有 $N \leqslant O^p(G)$。设 H_p 为 H 的 $Sylow\ p$-子群，其中 $H_p=P$，故 $N \leqslant H_p$。取 G 的 $Sylow\ p$-子群 G_p，使得 $H_p \leqslant G_p$，G_p 的极大子群 Q_1 使得 $M_p \leqslant Q_1$。由文献[8]定理1的证明过程可知，$R=Q_1 \cap H_p$ 为 H_p 的极大子群。因 R 在 G 中次正规，故存在 $R, RM_1, RM_2, \cdots, RM_s, RM_{s+1}=RM$ 为 G 的一个次正规群列的一部分。若 $RM=G, Q \in Syl_q(G), q \neq p$，则 $Q \cap P_1M_1 \in Syl_q(M_1), Q \cap P_1M_2 \in Syl_q(M_2), \cdots, Q \cap P_1M \in Syl_q(M)$，即 $Q \cap M \in Syl_q(M)$，则 $Q \cap M=Q$，可推出 $Q \leqslant M$。进一步 $O^p(G) \leqslant M$，即 $N \leqslant M$，矛盾。若 $RM=M$，则 $R \leqslant M$。由于 $G=MN=MH_p$ 及 R 是 H_p 的极大子群，$|N|=|G:M|=|H_p:H_p \cap M|=|H_p:R|=p$(若 $|N|=|G:M|=|H_p:H_p \cap M|=|H_p:H_p|=1$，则 $G=NM=M$ 与 M 的极大性矛盾)，从而 N 为 p 阶循环群，得 G 为 p-超可解群，矛盾。

证毕

定理2 设群 G 有 p-可解正规子群 H 且满足 G/H 为 p-超可解群。若 $O_{p'}(H)$ 的极大子群包含于 $F_p(H)$ 中且在 G 中次正规，则 G 为 p-超可解群。

证明 设群 G 是极小阶反例。则

1) $O_{p'}(G)=1$。

首先证明，$O_{p'}(H)=1$。若不然，$T=O_{p'}(H) \neq 1$，考虑$\overline{G}=G/T$。显然，$\overline{G}/\overline{H} \cong G/H$ 为 p-超可解，其中$\overline{H}=H/T$。现在，$O_{p'}(\overline{H})=1$ 且 $F_p(\overline{H})=F_p(H)/T$。设 $M/T <\cdot F_p(\overline{H})$，则 $T \leqslant M <\cdot F_p(H)$。因为 $M \lhd\lhd G$，由引理1，$M/T \lhd\lhd G/T$。这样$\overline{G}$满足定理的条件，G 之极小性蕴含$\overline{G}$为 p-超可解，故 G 亦然，矛盾。

现在证明，$O_{p'}(G)=1$。假如 $R=O_{p'}(G) \neq 1$，考虑$\overline{G}=G/R$。易见$\overline{G}/\overline{H} \cong G/HR$ 为 p-超可解，其中$\overline{H}=HR/R$。利用 $O_{p'}(H)=1$，得到 $F_p(H)=O_p(H)$，故 $F_p(\overline{H})=F_p(H)R/R$。设$\overline{P}_1=P_1R/R <\cdot F_p(\overline{H})$。可设 $P_1 <\cdot F_p(H)$。既然 $P_1 \lhd\lhd G$，由引理1，$P_1R/R \lhd\lhd G/R$。G 的选择推出$\overline{G}$为 p-超可解，从而 G 也是 p-超可解，矛盾。

2) $H \cap \varphi(G)=1$。

为方便，记 $L=H \cap \varphi(G)$。如果 $L \neq 1$，考虑商群$\overline{G}=G/L$。利用文献[9]的定理3.5知，$F(H/L)=F(H)/L$，所以 $F(H/L)=O_p(H)/L$。另外，若记 $K/L=O_{p'}(H/L)$ 且设 S 是 K 的 $Hall\ p'$-子群，则有 $K=SL$ 且由 Frattini 论断，$G=KN_G(S)=LN_G(S)=N_G(S)$。因而 $S \lhd G$。所以 $S=1$ 而 $O_{p'}(H/L)=1$。这就得到 $F_p(H/L)=O_p(H/L)=O_p(H)/L=F_p(H)/L$。若 $P_1/L <\cdot F_p(H/L)$，则 $P_1 <\cdot F_p(H)$。因为 $P_1 \lhd\lhd G$，所以由引理1，$P_1/L \lhd\lhd G/L$。由 G 的极小归纳假设，$\overline{G}$是 p-超可解群。从而得出 G 也为 p-超可解群，矛盾。

3) 最后的矛盾。

由于 $O_{p'}(G)=1$，H 为 p-可解群，由引理4，$C_H(O_p(H)) \leqslant O_p(H)$。现在 $\varphi(H)=1$，由文献[8]的定理1知，$F(H)=O_p(H)$ 是非平凡初等交换 p-群，从而 $C_H(F(H))=F(H)$。

现在断言 G 的含于 $O_p(H)$ 的极小正规子群都是循环的。

取 $N\cdot\lhd G$ 且 $N\leqslant O_p(H)$。因为 $H\cap\varphi(G)=1$,存在 G 的极大子群 M 满足 $G=NM$ 且 $N\cap M=1$。如果 $P\cap M=P$,矛盾。故只有 $P\cap M<P$,于是可以取 P 的极大子群为 P_1,且 $P\cap M\leqslant P_1<\cdot P$。因为 P_1 是 G 的次正规子群,故 $P_1\lhd\lhd G$。

若 P 只有一个极大子群 P_1,则 P 为循环群,故 N 为初等交换循环群,即 $|N|=p$。若 P 至少有两个不同的极大子群,则 P 为非循环群。考虑 $O^p(G)$,如果 N 不小于或等于 $O^p(G)$,因为 $NO^p(G)/O^p(G)\cdot\lhd G/O^p(G)$,而 $G/O^p(G)$ 为 p-群,$N\cong NO^p(G)/O^p(G)$,因为 p-群的极小正规子群的阶为 p,故 N 为 p 阶循环群。

所以只能有 $N\leqslant O^p(G)$。设 H_p 为 H 的 $Sylow$ p-子群,其中 $H_p=P$,故 $N\leqslant H_p$。取 G 的 $Sylow$ p-子群 G_p,使得 $H_p\leqslant G_p$,G_p 的极大子群 Q_1 使得 $M_p\leqslant Q_1$。由文献[8]定理 1 的证明过程可知,$R=Q_1\cap H_p$ 为 H_p 的极大子群。因 R 在 G 中次正规,故存在 $R,RM_1,RM_2,\cdots,RM_s,RM_{s+1}=RM$ 为 G 的一个次正规群列的一部分。若 $RM=G,Q\in Syl_q(G),q\neq p$,则 $Q\cap P_1M_1\in Syl_q(M_1),Q\cap P_1M_2\in Syl_q(M_2),\cdots,Q\cap P_1M\in Syl_q(M)$,即 $Q\cap M\in Syl_q(M)$,则 $Q\cap M=Q$,可推出 $Q\leqslant M$。进一步 $O^p(G)\leqslant M$,即 $N\leqslant M$,矛盾。若 $RM=M$,则 $R\leqslant M$。由于 $G=MN=MH_p$ 及 R 是 H_p 的极大子群,$|N|=|G:M|=|H_p:H_p\cap M|=|H_p:R|=p$(若 $|N|=|G:M|=|H_p:H_p\cap M|=|H_p:H_p|=1$,则 $G=NM=M$ 与 M 的极大性矛盾),从而 N 为 p 阶循环群。

现在由引理 5,设 N_i 是 G 的 p 阶正规子群,$F(H)=N_1\times\cdots\times N_r,i=1,2,\cdots,r,Aut(N_i)$ 的一个子群同构于商群 $G/C_G(N_i)$,从而可知 $G/C_G(N_i)$ 是交换群。又因 G/H 为 p-超可解群,$G/H_G(N_i)=G/C_H(N_i)$ 为 p-超可解。所以 $G/(\bigcap_{i=1}^r C_H(N_i))$ 为 p-超可解。事实上,有 $G/F(H)$ 为 p-超可解,因为 $\bigcap_{i=1}^r C_H(N_i)=C_H(F(H))=F(H)$。但 G 在 $F(H)$ 下的主因子皆为 p 阶循环群,故 G 为 p-超可解。这是最后的矛盾。 证毕

参考文献:

[1] Wielandt H. Eine verallgemeinerung der invarianten untergruppen[J]. Math Z,1939,45:209-244.

[2] Bartels D. Subnormality and invariant relations onconjugacy classes in finite grops[J]. Math Z,1977,157:13-17.

[3] Lennox J C, Stonehewer S E. Subnormal subgroups of groups [J]. Oxford: Oxford Mathe-matical Publications, Clarenden Press,1987.

[4] SRobinson D J. A course in the Theory of groups[J]. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag,1982.

[5] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 第二版. 北京:科学出版社,1999:88.
Xu M Y. Finite group guide(on the books)[M]. 2nd Ed. Beijing: Science Press,1999:88.

[6] 黄琼. 关于有限群的次正规嵌入子群的研究[D]. 南宁:广西师范学院,2012:2.
Huang Q. Subnormalsubgroups and p-supersolvability of finite groups [D]. Nanning: Guangxi NormalUniversity, 2012:2.

[7] 韦华全. 子群特性与有限群结构[D]. 中山:中山大学,2006.
Wei H Q. Subgroups properties and structure of finite groups[D]. Zhongshan: Zhongshan University,2006.

[8] 王丽芳. 半置换子群对有限群的超可解性的影响[J]. 数学研究,2009,42(04):434-440.
Wang L F. The influence of s-semipermutable subgroups on the p-super solvability of finite groups[J]. Mathematics Research,2009,42(04):434-440.

[9] Huppert B, Endliche gruppen I[M]. NewYork: Springer-Verlag,1982.

Subnormal Subgroups and p-Super Solvability of Finite Groups

HUANG Qiong[1,2], MA Baiwan[3], HUANG Xinda[4], WEI Huaquan[5], YANG Liying[1]

(1. College of Mathematics and Statistics, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530023;
2. Guangxi Sports School, Nanning 530012; 3. Jiangsu Province Canal Middle School, Xuzhou Jiangsu 221300;
4. College of Electrical Engineering, Guangxi University;
5. College of Mathematics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Let group G has solvable normal subgroup H and G/H is a p-super solvable group. Prove: 1) If the maximal subgroups of $Sylow$ p-subgroup P of H subnormal in G, then G is a p-super solvable group; 2) If the maximal subgroups of $O_{p'}(H)$ include in the $F_p(H)$ and subnormal in G, then G is a p-super solvable group.

Key words: p-super solvable group; subnormal subgroup; $sylow$ p-subgroup

(责任编辑 许 甲)