DOI:10.11721/cqnuj20160104

具有随机效应的 SIRI 传染病模型的定性分析*

雷 桥, 杨志春
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要:研究了具双线性传染率的随机 SIRI 传染病模型的动态行为。首先,利用随机微分方程理论构造 V 函数,结合伊藤公式等方法,给出了随机 SIRI 传染病模型解的存在唯一性。然后,给出了随机模型平衡点稳定性和振荡性质,即当基本再生数小于等于 1 时,随机模型的无病平衡点是全局随机渐近稳定的,当基本再生数大于 1 时,随机模型的解围绕确定性模型的地方病平衡点是随机振荡。

关键词:随机传染病模型;SIRI;全局渐近稳定;振荡
中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)01-0081-05

传染病一直是人类健康的公敌,对其发病机理和传染规律的研究是关乎国计民生的重大问题,具有非凡的意义。为了预防和控制疾病的传播,利用微分方程建立传染病的数学模型并进行定性和定量分析是一种重要方法。通常的研究主要是针对确定性模型,但传染病的传播和发病过程受到外界随机干扰是不可避免的,近年来,不少学者建立了随机模型来研究传染病的动力学态。如 Gray [1] 等人考虑了随机 SIS 模型,获得了其解的全局存在唯一性,并获得了在持久性情况下解的平稳分布;Tornatore[2] 等人考虑接触率系数受到白噪声影响的随机 SIR 模型,讨论了无时滞和有时滞情况下的无病平衡点的稳定性。据作者所知,现有文献[3-9] 主要研究 SIS,SIR,SIRS 等随机传染病模型,但对具有随机效应的 SIRI 模型的研究几乎未见报道。

本文将在 Tudor[10] 建立的确定性 SIRI 模型基础上,给出接触率系数受到白噪声影响的随机 SIRI 模型,通过构造 V 函数并结合伊藤公式等方法,获得了随机 SIRI 传染病模型解的存在唯一性、无病平衡点和地方病平衡点的渐近行为,从而显示随机扰动对模型的影响。

1 模型建立

1990 年,Tudor[10] 提出 SIRI 传染病模型如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=b-\lambda SI-\mu S,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\lambda SI-(\mu+\gamma)I+\alpha R,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(\alpha+\mu)R,\end{cases}\tag{1}$$

其中 S 为易感人群数量,I 为已感人群数量,R 为恢复人群数量,b 表示出生率,μ 表示死亡率,γ 为恢复率,α 为免疫失去率,λ 是 S 和 R 之间的转移常数,这里 $b,\mu,\gamma,\alpha,\lambda$ 都为正常数。

利用确定性模型(1)的基本再生数 $R_0=\dfrac{\lambda b(\alpha+\mu)}{(\alpha+\gamma+\mu)\mu^2}$,已有如下结论(参见 Tudor[10] 和 Guo[11]):

i) 当 $R_0\leqslant 1$ 时,系统(1)仅有无病平衡点 $E_0=\left(\dfrac{b}{\mu},0,0\right)$,且平衡点 E_0 全局渐近稳定;

ii) 当 $R_0>0$ 时,系统(1)还有地方病平衡点 $E_1=(S_1,I_1,R_1)$,且平衡点 E_1 全局渐近稳定,这里

* **收稿日期**:2015-02-02 **修回日期**:2015-03-23 **网络出版时间**:2015-12-02 13:29
资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);重庆市自然科学基金(No. CQCSTC2014JCYJA40004);重庆市高校创新团队计划(No. KJTD201308);重庆师范大学研究生科研创新项目(No. YKC15015)
作者简介:雷桥,男,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:yangzhch@126.com;**通信作者**:杨志春,教授,E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1329.056.html

$$S_1=\frac{(\alpha+\gamma+\mu)\mu}{\lambda(\alpha+\mu)},I_1=\frac{\lambda b(\alpha+\mu)-(\alpha+\gamma+\mu)\mu^2}{\lambda(\alpha+\gamma+\mu)\mu},$$
$$R_1=\frac{\lambda b(\alpha+\mu)\gamma-\gamma(\alpha+\gamma+\mu)\mu^2}{\lambda(\alpha+\mu)(\alpha+\gamma+\mu)\mu}。$$

本文考虑模型(1)中,环境白噪声对接触率系数 λ 的随机扰动,即 λ 变为 $\lambda+\sigma\dot{B}(t)$,从而建立随机 SIRI 模型如下:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=(b-\lambda SI-\mu S)\mathrm{d}t-\sigma SI\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I=[\lambda SI-(\mu+\gamma)I+\alpha R]\mathrm{d}t+\sigma SI\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}R=[\gamma I-(\alpha+\mu)R]\mathrm{d}t,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $B(t)$ 是定义在完备概率空间上的标准布朗运动,σ 为布朗运动的干扰强度。

2 随机模型(2)的全局存在唯一性

借助于 Mao[12] 的主要思想,获得了模型(2)对应任意给定初值的正解存在唯一性。

定理1 对于任意给定的初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$,模型(2)存在唯一解 $(S(t),I(t),R(t))\in\mathbf{R}_+^3$,$t\geqslant0$,a. s.。

证明 由于模型(2)局部 Lipschitz 连续性,对任给初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$,模型(2)存在唯一的局部解 $(S(t),I(t),R(t))$,$t\in[0,\tau_e)$,τ_e 是爆破时间。下只需证明 $\tau_e=\infty$ a. s.。

对任给初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$,则存在足够大的正整数 k_0,使得 $S(0)$,$I(0)$,$R(0)$,均在区间 $\left[\frac{1}{k_0},k_0\right]$ 内部,对所有的正整数 $k\geqslant k_0$ 定义停时(本文中规定 $\inf\varnothing=\infty$,$\varnothing$ 为空集),

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min\{S(t),I(t),R(t)\}\leqslant\frac{1}{k}\text{ or }\max\{S(t),I(t),R(t)\}\geqslant k\right\}。\tag{3}$$

显然,τ_k 随着 k 的增大单调增加且有界。不妨设 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$,用反证法证明 $\tau_\infty=\infty$ a. s.。

假设 $\tau_\infty<\infty$,则存在两个常数 $T(T>0)$ 和 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,使得 $P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon$。因此,存在正整数 $k_1\geqslant k_0$,使得 $P\{\tau_k\leqslant T\}\geqslant\varepsilon$,$\forall k\geqslant k_1$。

定义函数 $V(S,I,R)=\left(S-a-a\ln\frac{S}{a}\right)+(I-1-\ln I)+(R-1-\ln R)$,$a\in\mathbf{R}^+$,由于对 $\forall x>0$,有 $x-1-\ln x\geqslant0$,则 V 是一个非负函数。由伊藤公式可得

$$\mathrm{d}V=\left(1-\frac{a}{S}\right)[(b-\lambda SI-\mu S)\mathrm{d}t-\sigma SI\mathrm{d}B(t)]+\left(1-\frac{1}{I}\right)\{\lambda[-(\gamma+\mu)I+\alpha R]\mathrm{d}t+\sigma SI\mathrm{d}B(t)\}+$$
$$\left(1-\frac{1}{R}\right)\left[\gamma[-(\alpha+\mu)R]\mathrm{d}t+\frac{\sigma^2(aI^2+S^2)}{2}\mathrm{d}t\leqslant[b+(a+2)\mu+\gamma+\alpha+(\lambda\lambda-\mu)I+\frac{\sigma^2(aI^2+S^2)}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma(aI-S)\mathrm{d}B(t)。$$

由于在 $t\in[0,\tau_e)$ 内,对任给初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$,模型(2)存在唯一的局部解 $(S(t),I(t),R(t))$,将随机模型(2)的3个式子相加可得

$$\mathrm{d}(S+I+R)=[b-\mu(S+I+R)]\mathrm{d}t。\tag{4}$$

根据停时的定义,在 $[0,t)$(其中 $t\in(0,\tau_k\wedge T)$)内对(4)式进行积分整理可得

$$S(t)+I(t)+R(t)=\frac{b}{\mu}-\frac{\mathrm{e}^{-\mu t}[b-\mu(S(0)+I(0)+R(0))]}{\mu}。$$

若 $b-\mu(S(0)+I(0)+R(0))\geqslant0$,则 $S(t)+I(t)+R(t)\leqslant\frac{b}{\mu}$;若 $b-\mu(S(0)+I(0)+R(0))<0$,则 $S(t)+I(t)+R(t)\leqslant S(0)+I(0)+R(0)$;令 $M_1=\max\left\{\frac{b}{\mu},S(0)+I(0)+R(0)\right\}$,则 $S(t)+I(t)+R(t)\leqslant M_1$,$M_1$ 是与 k 无关的常数。取 $a=\frac{\mu}{\lambda}$,则 $\lambda a-\mu=0$,令 $M=b+\left(\frac{\mu}{\lambda}+2\right)\mu+\lambda+\alpha+\frac{\sigma^2M_1^2(\lambda+\mu)}{2\lambda}$,则

$$\mathrm{d}V\leqslant M\mathrm{d}t-\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)-\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)-\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t)。\tag{5}$$

对(5)式取0到 $\tau_k\wedge T$ 内的积分并取期望可得

$$E[V(S(\tau\wedge T),I(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T))]\leqslant V(S(0),I(0),R(0))+MT。$$

令 $\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}$，则 $P(\Omega_k)\geqslant\varepsilon$，对 $\forall\,\varepsilon\in\Omega_k$，由停时定义可知 $S(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega),R(\tau_k,\omega)$ 中至少有一个等于 k 或者 $\frac{1}{k}$，那么

$$V(S(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega),R(\tau_k,\omega))\geqslant\min\left\{k-1-\ln k,k-\frac{\mu}{\lambda}\left(1+\ln\frac{\lambda k}{\mu}\right),\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k},\frac{1}{k}-\frac{\mu}{\lambda}\left(1+\ln\frac{\lambda}{k\mu}\right)\right\}。$$

所以

$$V(S(0),I(0),R(0))+MT\geqslant E[I_{\Omega k}V(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T)]\geqslant$$
$$\varepsilon\min\left\{k-1-\ln k,k-\frac{\mu}{\lambda}\left(1+\ln\frac{\lambda k}{\mu}\right),\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k},\frac{1}{k}-\frac{\mu}{\lambda}\left(1+\ln\frac{\lambda}{k\mu}\right)\right\},$$

其中 I_{Ω_k} 是 Ω_k 的示性函数。当 $k\to\infty$ 时，可得 $V(S(0),I(0),R(0))+MT\geqslant\infty$，矛盾。故假设不成立，从而有 $\tau_e=\infty$ a. s. 。　　证毕

从定理 1 看出无论白噪声的强度 σ 有多大，随机模型(2)对任给的正初值几乎必然存在唯一的全局正解，同时由爆破时间为 $\tau_e=\infty$ a. s. 可得出这个正解是几乎必然有界的，即对任意的 $t\geqslant0$，$S(t)+I(t)+R(t)\leqslant M_1$ a. s. 。

3 模型(2)无病平衡点的渐近稳定性

易知，确定性模型(1)的无病平衡点 E_0 也是随机模型(2)无病平衡点，本节主要讨论随机模型(2)无病平衡点 E_0 的渐近稳定性。

定理 2　如果 $R_0\leqslant1$，则随机模型(2)的无病平衡点 $E_0\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ 是全局随机稳定的。

证明　设 $(S(t),I(t),R(t))$ 是随机模型(2)对应任意给定的初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}^3_+$ 的正解。令 $x_1=S-\frac{b}{\mu}$，$x_2=I$，$x_3=R$，则模型(2)即可转化为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1=\left[b-\lambda\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2-\mu\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)\right]\mathrm{d}t-\sigma\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2\,\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}x_2=\left[\lambda\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2-(\mu+\gamma)x_2+\alpha x_3\right]\mathrm{d}t-\sigma\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2\,\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}x_3=[\gamma x_2-(\alpha+\mu)x_3]\mathrm{d}t。\end{cases}\tag{6}$$

构造 Lyapunov 函数：$V(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)^2+a_1x_2+a_2x_3$（$a_1,a_2$ 为待定正常数）。利用伊藤公式

$$\mathrm{d}V=LV\mathrm{d}t+a_1\sigma\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2\,\mathrm{d}B(t),$$

其中

$$LV=(x_1+x_2+x_3)\left[b-\mu\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)-\mu x_2-\mu x_3\right]+a_1\left[\lambda\left(x_1+\frac{b}{\mu}\right)x_2-(\gamma+\mu)x_2+\alpha x_3\right]+$$
$$a_2[\gamma x_2-(\alpha+\mu)x_3]=-\mu(x_1+x_2+x_3)^2+\lambda a_1x_1x_2+\left[\frac{\lambda a_1b}{\mu}-a_1(\gamma+\mu)+a_2\gamma\right]x_2+$$
$$[a_1\alpha-a_2(\alpha+\mu)]x_3。$$

取 $a_1=\frac{2\mu}{\lambda}$，$a_2=\frac{2\mu\alpha}{\lambda(\alpha+\mu)}$，则 $LV=-\mu(x_1+x_3)^2-\mu x_2^2-2\mu x_2x_3+\frac{2(\alpha+\gamma+\mu)\mu^2}{\lambda(\alpha+\mu)}(R_0-1)x_2$。

由于 $x_2=I(t)>0$，$x_3=R(t)>0$，若 $R_0\leqslant1$，则 $LV<0$ 即 LV 负定，从而有随机模型(2)的无病平衡点 $E_0\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ 是全局随机渐近稳定的。

从定理 2 可以看出：当 $R_0\leqslant1$ 时，随机模型(2)的无病平衡点 $E_0\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ 是随机全局稳定的，无论白噪声强度 σ 有多大，都不影响随机模型(2)的无病平衡点的随机全局稳定性。

4 模型(2)地方病平衡点的渐近性质

当 $R_0>0$，确定性模型的地方病平衡点 $E_1(S_1,I_1,R_1)$ 是全局渐近稳定的，但对于随机模型(2)而言，E_1 可能不再是其地方病平衡点，本节主要研究随机模型(2)的解在 E_1 附近的渐近行为。

定理 3　当 $R_0>1$ 时，那么

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{t}\int_0^t\{(S(r)-S_1)^2+(I(r)-I_1)^2+(R(r)-R_1)^2\}\mathrm{d}r\leqslant\frac{\sigma^2(\alpha+2\gamma+2\mu)M_1^2I_1}{\lambda\alpha}\text{a. s.},$$

其中 $M_1=\max\left\{\frac{b}{\mu},S(0)+I(0)+R(0)\right\}$，$(S(t),I(t),R(t))$ 是模型(2)满足任给初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$ 的正解。

证明 由 $R_0>1$，模型(1)存在正平衡点 $E_1(S_1,I_1,R_1)$，且满足

$$b-\lambda S_1I_1-\mu S_1=0,\lambda S_1I_1-(\mu+\gamma)I_1+\alpha R_1=0,\gamma I_1-(\alpha+\mu)R_1=0。\qquad(7)$$

定义正函数：$W(S,I,R)=W_1+\frac{2\mu}{\alpha}W_2+\frac{2\mu(\alpha+\gamma+2\mu)}{\lambda\alpha}\left(W_3+\frac{\alpha}{\alpha+\mu}W_4\right)$，其中 $W_1=\frac{1}{2}(S-S_1+R-R_1+I-I_1)^2$，$W_2=\frac{1}{2}(S-S_1+I-I_1)^2$，$W_3=I-I_1-I_1\ln\frac{I}{I_1}$，$W_4=R-R_1-R_1\ln\frac{R}{R_1}$。

利用伊藤公式及(7)式可计算得

$$LW_1=-\mu(S-S_1)^2-\mu(I-I_1)^2-\mu(R-R_1)^2-2\mu(S-S_1)(I-I_1)-2\mu(S-S_1)(R-R_1)-2\mu(I-I_1)(R-R_1),$$

$$LW_2=-\mu(S-S_1)^2-(\mu+\gamma)(I-I_1)^2-(2\mu+\gamma)(S-S_1)(I-I_1)+\alpha(S-S_1)(R-R_1)+\alpha(I-I_1)(R-R_1),$$

$$LW_3=-\left(1-\frac{I_1}{I}\right)(\lambda SI-(\gamma+\mu)I+\alpha R)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2I_1=\lambda(S-S_1)(I-I_1)-\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\mu}(I-I_1)+\alpha R-\alpha I_1\frac{R}{I}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2I_1,$$

$$LW_4=\left(1-\frac{R_1}{R}\right)[\gamma I-(\alpha+\mu)R]=\gamma I-(\alpha+\mu)(R-R_1)-\gamma R_1\frac{I}{R}。$$

因此，
$$LW_3+\frac{\alpha}{\alpha+\mu}LW_4=\lambda(S-S_1)(I-I_1)+2\alpha R_1+\frac{1}{2}\sigma^2S^2I_1-\alpha I_1\frac{R}{I}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\mu}R_1\frac{I}{R}\leqslant$$
$$\lambda(S-S_1)(I-I_1)+2\alpha R_1+\frac{1}{2}\sigma^2S^2I_1-2\alpha\sqrt{\frac{R}{I}I_1\times\frac{\gamma}{\alpha+\mu}\frac{I}{R}R_1}=\lambda(S-S_1)(I-I_1)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2I_1,$$

从而有
$$LW=LW_1+\frac{2\mu}{\alpha}LW_2+\frac{2\mu(\alpha+\gamma+2\mu)}{\lambda\alpha}\left(LW_3+\frac{\alpha}{\alpha+\mu}LW_4\right)<$$
$$-\frac{(\alpha+2\mu)\mu}{\alpha}(S-S_1)^2-\frac{(\alpha+2\gamma+2\mu)\mu}{\alpha}(I-I_1)^2-\mu(R-R_1)^2+\frac{\mu(\alpha+2\gamma+2\mu)\sigma^2S^2I_1}{\lambda\alpha}\leqslant$$
$$-\frac{(\alpha+2\mu)\mu}{\alpha}(S-S_1)^2-\frac{(\alpha+2\gamma+2\mu)\mu}{\alpha}(I-I_1)^2-\mu(R-R_1)^2+\frac{\mu(\alpha+2\gamma+2\mu)\sigma^2M_1^2I_1}{\lambda\alpha}。$$

那么，
$$\mathrm{d}W=LW\mathrm{d}t+\frac{2\sigma\mu(\sigma+\gamma+2\mu)}{\lambda\alpha}S(I-I_1)\mathrm{d}B(t)\leqslant$$
$$\left\{-\frac{(\alpha+2\mu)\mu}{\alpha}(S-S_1)^2-\frac{(\alpha+2\gamma+2\mu)\mu}{\alpha}(I-I_1)^2-\mu(R-R_1)^2+\frac{\mu(\alpha+2\gamma+2\mu)\sigma^2M_1^2I_1)}{\lambda\alpha}\right\}\mathrm{d}t+$$
$$\frac{2\sigma\mu(\alpha+\gamma+2\mu)}{\lambda\alpha}S(I-I_1)\mathrm{d}B(t)。$$

所以，
$$W(S(t),I(t),R(t))=W(S(0),I(0),R(0))+$$
$$\int_0^t\left\{-\frac{(\alpha+2\mu)\mu}{\alpha}(S(r)-S_1)^2-\frac{(\alpha+2\gamma+2\mu)\mu}{\alpha}(I(r)-I_1)^2-\mu(R(r)-R_1)^2+\frac{\mu(\alpha+2\gamma+2\mu)\sigma^2M_1^2I_1)}{\lambda\alpha}\right\}\mathrm{d}r+$$
$$\frac{2\sigma\mu(\alpha+\gamma+2\mu)}{\lambda\alpha}M(t),$$

其中 $M(t)=\int_0^tS(t)[I(t)-I_1]\mathrm{d}B(t)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{\langle M,M\rangle_t}{t}\leqslant M_1^4<\infty$ 从而 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0$ a. s.。

于是有
$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_0^t\left\{\frac{(\alpha+2\mu)}{\alpha}(S(t)-S_1)^2+\frac{(\alpha+2\gamma+2\mu)}{\alpha}(I(r)-I_1)^2+(R(r)-R_1{}^2)\right\}\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\frac{\sigma^2(\alpha+2\gamma+2\mu)M_1^2I_1}{\lambda\alpha}\text{ a. s.。}$$

由于 $\frac{\alpha+2\mu}{\alpha}>1$，$\frac{\alpha+2\gamma+2\mu}{\alpha}>1$，进一步有 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_0^t\{(S(t)-S_1)^2+(I(r)-I_1)^2+(R(r)-R_1)^2\}\mathrm{d}r\leqslant$

$\frac{\sigma^2(\alpha+2\gamma+2\mu)M_1^2 I_1}{\lambda\alpha}$ a. s. 。

从定理 3 可以看出：当 $R_0>1$ 时，随机模型(2)对应任给的初值$(S(0),I(0),R(0))\in \mathbf{R}_+^3$ 的正解围绕确定性模型(1)的地方病平衡点 $E_1(S_1,I_1,R_1)$随机振动，白噪声强度 σ 越小，振幅就越小。

5 结语

本文考虑接触率系数 λ 受到白噪声扰动的随机 SIRI 模型，获得了随机模型(2)对应任意正初值的正解全局几乎必然存在唯一性，并获得了：当确定性模型的基本再生数 $R_0\leqslant 1$ 时，随机模型的无病平衡点是全局随机渐近稳定的；确定性模型的基本再生数 $R_0>1$ 时，随机模型的解围绕确定性模型的地方病平衡点是随机振荡。

参考文献：

[1] Gray A, Greenhalgh D, Hu L, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(3): 876-902.

[2] Tornatore E, Buccellato S, Vetro P. Stability of a stochastic SIR system[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005(354): 111-126.

[3] Zhao Y, Jiang D. Dynamics of stochastically perturbed SIS epidemic model with vaccination[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1-12.

[4] Zhao Y, Jiang D. The threshold of a stochastic SIS epidemic model with vaccination[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 718-727.

[5] Lin Y, Jiang D, Xia P. Long-time behavior of a stochastic SIR model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 236: 1-9.

[6] Wang F, Wang X, Zhang S, et al. On pulse vaccine strategy in a periodic stochastic SIR epidemic model[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2014, 66: 127-135.

[7] Lahrouz A, Omari L. Extinction and stationary distribution of a stochastic SIRS epidemic model with non-linear incidence[J]. Statistics & Probability Letters, 2013, 83(4): 960-968.

[8] Ji C, Jiang D. Threshold behaviour of a stoch astic SIR model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014(38): 5067-5079.

[9] Zhao Y, Jiang D, O'Regan D. The extinction and persistence of the stochastic SIS epidemic model with vaccination[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2013, 392(20): 4916-4927.

[10] Tudor D. A deterministic model for herpes infections in human and animal populations[J]. SIAM Review, 1990, 32(1): 136-139.

[11] Guo P, Yang Z. The stability of SIRI model with Nonliner Incidience Rate[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(4): 35-39.

[12] Mao X, Marion G, Renshaw E. Environmentalbrownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2002, 97(1): 95-110.

[13] Mao X. Stochastic differential equations and applications[M]. Chichester: Horwood, 2008.

The Qualitative Analysis of SIRI Epidemic Model with Stochastic Effects

LEI Qiao, YANG Zhichun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we considered dynamical behaviors of Stochastic SIRI epidemic model with bi-linear incidence rate. Firstly, we show that the stochastic SIRI epidemic model has a unique global positive solution by using Ito formula, that is to say the solution of the model will not explode to infinite in a finite time. In addition, the stability and oscillation is investigated for the equilibria. That is, the disease-free equilibrium of the stochastic model is globally asymptotically stable in stochastic meaning when the basic reproduction number is equal or lesser than one, and the solution is fluctuate around the endemic equilibrium of the deterministic model when the basic reproduction number is greater than one.

Key words: stochastic epidemic model; SIRI; global asymptotic stability; oscillation

(责任编辑　游中胜)