

两轮自平衡机器人动力学模型分析及PID控制方法研究*

梁华^{1,2}, 李晓虹³, 杨光祥^{1,2}

1. 重庆工商大学 检测控制集成系统重庆市市级工程实验室;
2. 重庆工商大学 装备系统服役健康保障国际联合研究中心, 重庆 400067;
3. 重庆师范大学 计算机与信息科学学院, 重庆 401331)

摘要:针对两轮自平衡机器人高阶次、不稳定、多变量、非线性、强耦合的特点,以其为研究对象,采用 Lagrange 方法建立状态方程,并对其平衡控制进行了研究,采用 STM32 单片机设计了控制系统进行验证,以寻求最优的系统动态性能,提高系统稳定性和鲁棒性。根据机器人俯仰角度和速度等输入参数,采用 PID 算法输出 PWM 占空比可变的脉冲对驱动电机进行控制。仿真实验证明,本方法具有较好的动态性能和快速性。通过实际测试,证明了本方法的有效性。

关键词:两轮自平衡机器人;PID;动力学模型;平衡控制;STM32

中图分类号:TP242

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2016)01-0163-05

两轮自平衡机器人(Two-wheeled self balancing robot, TWSBR)是一种两轮同轴的机械结构特殊轮式移动机器人,具有结构简单、灵活、节能环保等特点,在特殊环境下的探测、航空航天、交通旅游等领域具有广阔的应用前景。其动力学方程是一多变量、严重不稳定、耦合、欠驱动、时变、参数不确定的非线性高阶方程,对其控制理论及系统的研究受到国内外机器人领域的高度重视^[1-2]。

近年来,在传感器技术以及人工智能理论的推动下,两轮自平衡机器人的研究得到较快和较深入的发展。目前,针对两轮自平衡机器人的平衡控制,国内外许多学者提出了多种不同方案,也取得了重要成果^[3-6],为本文的深入研究提供了深厚的理论基础和应用基础。Huang J 等人^[7]探讨了参数不确定性和外界扰动并存的自平衡系统鲁棒性速度跟踪问题。丁学明等人^[8]采用分层模糊方法来解决自平衡系统的直线行走和镇定控制问题。王凯等人^[9]均采用极点配置法实现了自平衡系统的行走和镇定控制。Li Z J 等人^[10]针对轮式倒立摆的参数不确定性开展了基于自适应模糊的控制研究。但以上研究仅给出了仿真结果,各控制算法对模型不确定性的抑制能力尚不能在实物控制过程中充分体现。Ahmad S 等人^[11]将两层模块化模糊控制用于两轮自平衡系统的控制。段学超等人^[12]提出了一种模糊进化型极点配置控制器用于实现自平衡系统的动态镇定和行走控制。Lin S C 等人^[13]采用自适应鲁棒比例微分(PD)控制器实现了自平衡系统的控制。这两种控制分别在模型实验中取得了较好的效果。阮晓钢等人^[14]提出了一种基于联想学习的离散 Hopfield 网络实现方法。这些研究取得了很重要的理论成果及应用,为本项目研究取得了前期成果。

根据这些研究成果,本文采用 Lagrange 方法建立了两轮自平衡机器人的状态方程,对驱动部分采用传统 PID 控制,根据机器人偏转角度与输出电压之间关系,以输出 PWM 波对驱动电机进行控制;同时采用极点配置方法对平动速度、转速等参数进行了仿真,以寻求最优的系统动态性能,提高系统稳定性和鲁棒性。

1 两轮自平衡机器人动态模型

两轮自平衡机器人由于其两轮同轴结构,质心比支点要低,是一个不稳定对象。两轮自平衡机器人的设计原理基础是倒立摆。倒立摆问题已在机械和控制理论领域得到广泛研究,但是两轮自平衡机器人是倒立摆的复杂应用,两轮自平衡机器人是由两个电机驱动轮子进行移动,车体在运动过程中可以进行转向和俯仰角度偏转,

* 收稿日期:2015-03-17 修回日期:2015-09-06 网络出版时间:2015-12-02 13:26

资助项目:重庆市科委前沿与应用基础研究项目(No. cstc2015jcyjA90003);重庆市教委项目(No. KJ1500620);重庆市检测控制集成系统实验室开放课题(No. 1456042)

作者简介:梁华,女,工程师,研究方向电气自动化,E-mail: lianghua200607@126.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1326.022.html>

因此两轮自平衡机器人的状态方程比倒立摆要复杂。因此在研究其运动控制前必须对其运动进行分析。根据倒立摆的原理,应用 Lagrange 方法^[15]可以建立如下空间坐标系。

图 1 中, m 为机器人质量, L 为质心高度, $2f$ 是两轮之间距离, θ 为俯仰角, R 为轮子半径, 根据模型, 左右轮的速度分别为:

$$V_l = -R \dot{\theta}_l, V_r = -R \dot{\theta}_r. \quad (1)$$

Y-Z 平面质心的速度可以分解为:

$$V_{y1} = -\dot{\theta}L\cos\theta, V_z = -\dot{\theta}L\sin\theta. \quad (2)$$

机器人质心在 X-Y 平面的速度可以分解为 V_x and V_{y2} ,

$$V_x = -\dot{\phi}L\sin\theta, V_{y2} = -(R\dot{\theta}_l + R\dot{\theta}_r)/2, \quad (3)$$

其中 ϕ 是质心在 X-Y 平面的转角, 可以得到:

$$\dot{\phi} = (R\dot{\theta}_l - R\dot{\theta}_r)/(2f). \quad (4)$$

设 $J_\phi(\theta)$ 为质心围绕 Z 轴的转动惯量, 随着 θ 而改变。当 θ 非常小时, $J_\phi(\theta)$ 可以被看作常数 J_ϕ 。

质心速度可以分解为平移速度和转动速度。机器人总转动动能包括机器人本体及两个轮子的平动动能和转动动能, 机器人总的动能如下:

$$T = \frac{1}{2} \left(J_\theta \dot{\theta}^2 + J_\phi \frac{R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2}{4f^2} \right) + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} R^2 (m_l \dot{\theta}_l^2 + m_r \dot{\theta}_r^2) + \frac{1}{2} (J_l \dot{\theta}_l^2 + J_r \dot{\theta}_r^2) + \frac{1}{8} (m_l + m_r) R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2 L^2 \sin^2 \theta}{4f^2} + \left(-\dot{\theta}L\cos\theta - \frac{1}{2}R(\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r) \right)^2 \right), \quad (5)$$

其中, m_l, m_r 分别为左右轮子质量。根据机器人广义坐标中的 3 个广义力: 左轮转动力矩、右轮转动力矩、以及 X 轴上转矩:

$$Q_{\theta_l} = M_l, \quad (6)$$

$$Q_{\theta_r} = M_r, \quad (7)$$

$$Q_\theta = mgL\sin\theta - M_l - M_r. \quad (8)$$

代入 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (9)$$

假设 $|\theta| \leq 5^\circ$ 则可近似为 $\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1$, 运动方程可以简化并线性化为如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4}R^2 + m_l R^2 + J_l + \frac{J_\phi R^2}{4f^2} + \frac{m_l + m_r}{4}R^2 & \frac{m}{4}R^2 - \frac{J_\phi R^2}{4f^2} - \frac{m_l + m_r}{4}R^2 & \frac{1}{2}mRL \\ \frac{m}{4}R^2 - \frac{J_\phi R^2}{4f^2} - \frac{m_l + m_r}{4}R^2 & \frac{m}{4}R^2 + m_r R^2 + J_r + \frac{J_\phi R^2}{4f^2} + \frac{m_l + m_r}{4}R^2 & \frac{1}{2}mRL \\ \frac{1}{2}mRL & \frac{1}{2}mRL & J_\theta + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_l \\ \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \theta_r \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_l \\ M_r \\ -M_l - M_r \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中, 电机转矩和控制电压之间的关系为:

$$M = K_m(U - K_e \dot{\theta}). \quad (11)$$

由于左右轮结构相同, 因此其力矩系数和反电动势系数一样。

2 PID 控制系统设计

两轮自平衡机器人平衡由体内嵌入式微处理器控制, 采用加速度传感器和角速度传感器组合构成的姿态检测系统来检测机器人的运动姿态。姿态信号经过 PID 控制算法, 计算出 PWM 信号, 控制输出转矩, 对电机进行

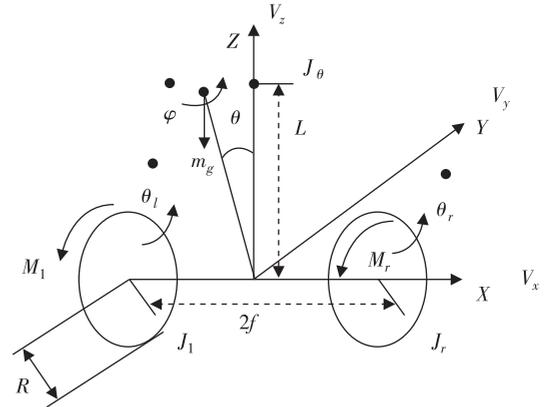


图 1 两轮自平衡机器人动力学模型

驱动控制,调整车体平台的运动姿态,从而使机器人始终保持动态平衡。

系统主要算法涉及角度融合和电机控制两个部分。角度融合用于求出陀螺仪和加速度计的互补角度值;电机控制需要根据 MPU 算出的角度值控制 PWM 波占空比。所以在一定程度上,角度的准确度决定了 PID 输出占空比的精准度,最后决定了小车系统的动态平衡性能。而 PID 方法的不同选择也会导致系统动态性能的极大差异。系统控制流程如图 2 所示。

控制器输入端经过传感器数据计算需要输出电流大小,由控制器通过 PID 算法计算应该输出的相应 PWM 波占空比及方向,输出到电机驱动端。经过滤波得到电压信号,最后输入到电机驱动芯片,根据电压的大小来控制输出的电流。最大输出电流 10 A,对应占空比为 5%~95%。

两轮自平衡机器人部分参数如下:

根据第二节的推导,可得到系统的状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{C}\mathbf{X}+\mathbf{D}\mathbf{U}, \quad (13)$$

其中 $\dot{\mathbf{X}}=[\ddot{\theta}_l, \ddot{\theta}_r, \ddot{\theta}, \dot{\theta}]^T, \mathbf{U}=[U_l, U_r]^T$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.6692 & 0.3021 & 0 & -77.6943 \\ 0.3021 & 0.6692 & 0 & -77.6943 \\ 0.0217 & 0.0217 & 0 & 1.3303 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -0.0571 & 0.8661 \\ 0.8661 & -0.0571 \\ -0.4255 & -0.4255 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0.1015 & 0.1015 & 0 & 0 \\ -0.286 & 0.286 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据状态方程,可以转换为传递函数,得到左右轮驱动电压对俯仰角的传递函数为:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{0.0821s^3-0.0875s^2+6.6017s-1.9110}{s^4-1.8694s^2+3.3719s-0.3015} \quad (14)$$

3 实验结果

在小车静止时,在平衡点附近给小车一个初始扰动,俯仰角为 0.2 rad,即 $\mathbf{X}=[0,0,0,0.2]^T$,可以得到系统的仿真响应曲线和实际响应曲线如图 3 所示。

从图 3 可以看出,系统仿真曲线表明系统在 3.1 s 后趋于稳定,且最大超调量大约为 19%,系统具有较快的响应速度,且最大动态偏差较小,具有较好的动态特性。实际测试曲线相对仿真曲线有一定的偏差,但是总体趋势符合仿真曲线,尤其是调整时间能够与仿真曲线一致,证明了本 PID 控制算法的有效性。

根据李亚普洛夫第一判据并计算能控矩阵的秩和能观矩阵的秩都为 4,系统能观能控。因而通过极点配置方法,对系统速度和角速度的阶跃响应仿真曲线如图 4 所示,系统能够在 2 s 左右恢复平衡状态。

为了测试所设计的控制器其输出波形,假设系统在不同的初始角度下经过控制器计算后实际测量得到的输出 PWM 脉冲波形如图 5 所示。图 5 中分别列出了输出不同占空比条件下(16.7%和 86.1%)的实际测试波形。为方便编程,本文中高占空比越高代表的输出量越小。

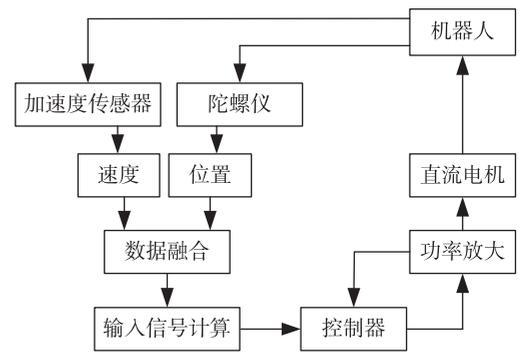


图 2 两轮自平衡机器人总控制图

表 1 两轮自平衡机器人部分参数

符号	名称	单位	值
m	车体质量	kg	38
m_l	左轮质量	kg	3.5
m_r	右轮质量	Kg	3.5
L	质心到 X 轴距离	m	0.18
f	轮距之一半	m	0.305
R	车轮半径	m	0.203
J_l	左车轮转动惯量	kg · m ²	0.072 12
J_r	右车轮转动惯量	kg · m ²	0.072 12
K_m	力矩系数	Nm/A	0.056 2
K_e	反电动势系数	V/rad/s	0.385 4
R_a	电机内阻	Ω	1.0
J_m	电机转动惯量	kg · m ²	0.005

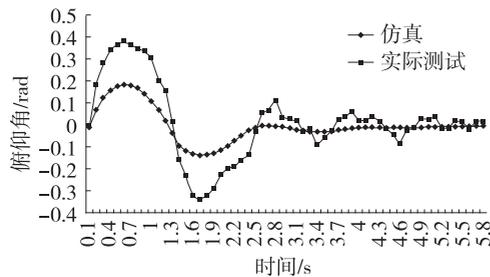


图 3 阶跃响应曲线

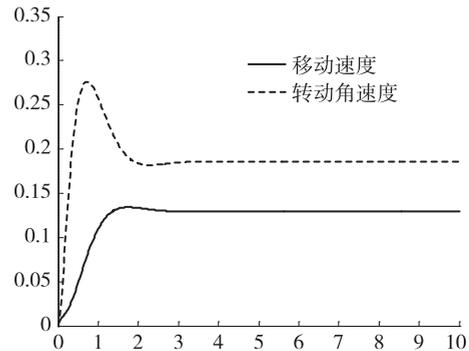
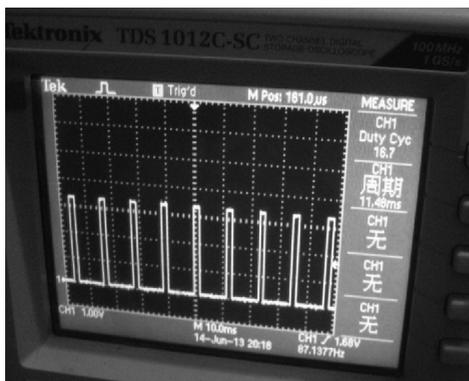
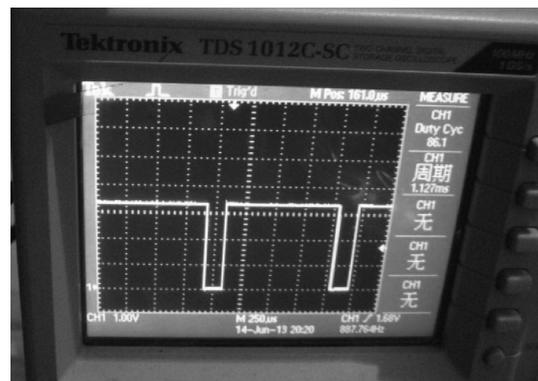


图 4 速度和角速度阶跃响应曲线



a 低占空比 PWM



b 高占空比 PWM

图 5 不同占空比条件下输出的 PWM

通过在原型机上进行测试,系统运行稳定可靠,行走和平衡控制具有较好的动态特性。

4 结论

本文通过分析两轮自平衡机器人的运动,利用 Lagrange 方法建立了其状态方程,并设计了以传感器测试参数为输入、以电机驱动电压为输出的 PID 控制器。同时利用 STM32 单片机设计了两轮自平衡机器人的控制系统,通过控制器产生占空比变化的 PWM 脉冲波形实现对机器人的驱动控制。通过仿真实验和实际测试,所设计算法有效,研制的控制系统能够实现对机器人的平衡控制。

参考文献:

- [1] Baloh M, Parent M. Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system [C]//The conference on computational intelligence, robotics, and autonomous systems. Singapore, 2003: 1-7.
- [2] Ruan X G, Chen J, Cai J X, et al. Research on stable control for two-wheeled self-balancing robot in complex environment [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2011, 37(9): 1310-1316.
- [3] 阮晓钢, 任红格. 两轮自平衡机器人动力学建模及其平衡控制 [J]. 计算机应用研究, 2009, 26(1): 99-101.
Ruan X G, Ren H G. Two-wheeled self balancing mobile robot dynamic model and balancing control [J]. Application Research of Computers, 2009, 26(1): 99-101.
- [4] Deng M, Inoue A, Sekiguchi K, et al. Two-wheeled mobile robot motion control in dynamic environments [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2010, 26(3): 268-272.
- [5] Lee H, Jung S. Balancing and navigation control of a mobile inverted pendulum robot using sensor fusion of low cost-sensors [J]. Mechatronics, 2012(2): 95-105.
- [6] 曹玉丽, 史仪凯, 袁小庆, 等. 自平衡机器人变论域模糊 PID 控制研究 [J]. 计算机仿真, 2013, 30(2): 347-350.
Cao Y L, Shi Y K, Yuan X Q, et al. Research on two-wheeled self-balanced robot based on variable universe fuzzy PID control [J]. Computer Simulation, 2013, 30(2): 347-350.
- [7] Huang J, Guan Z, Matsuno T, et al. Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2010, 26(4): 750-758.
- [8] 丁学明, 张培仁, 杨兴明, 等. 分层模糊控制在两轮移动式倒立摆中的应用 [J]. 电机与控制学报, 2005, 9(4): 372-

375.
Ding X M, Zhang P R, Yang X M, et al. The application of hierarchical fuzzy control for two-wheel mobile inverted pendulum[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(4): 372-375.
- [9] 王凯, 王士敏. 双轮共轴移动式倒立摆动力学建模与状态反馈控制[J]. *动力学与控制学报*, 2007, 5(2): 153-158.
Wang K, Wang S M. Dynamic motion and state feedback control of a two-wheeled coaxial mobile inverted pendulum [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 7(2): 153-156.
- [10] Li Z J, Xu C Q. Adaptive fuzzy logic control of dynamic balance and motion for wheeled inverted pendulums[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160(12): 1787-1803.
- [11] Ahmad S, Siddique N, Tokhi M. A modular fuzzy control approach for two-wheeled wheelchair[J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2011, 64(3/4): 401-426.
- [12] 段学超, 袁俊, 满曰刚. 两轮自平衡机器人的动力学建模与模糊进化极点配置控制[J]. *信息与控制*, 2013, 42(2): 189-196.
Duan X C, Yuan J, Man Y G. Dynamical modeling and fuzzy evolutionary pole placement control for a two-wheeled self-balancing robot[J]. *Information and Control*, 2013, 42(2): 189-196.
- [13] Lin S C, Tsai C C, Huang H C. Adaptive robust self-balancing and steering of a two-wheeled human transportation vehicle[J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2011, 62(1): 103-123.
- [14] 阮晓钢, 赵建伟. 基于 Hopfield 网络的柔性两轮自平衡机器人控制[J]. *机器人*, 2010, 32(3): 405-413.
Ruan X G, Zhao J W. Flexible two-wheeled self-balancing robot control based on Hopfield neural network[J]. *Robot*, 2010, 32(3): 405-413.
- [15] 屠运武, 徐俊艳, 张培仁, 等. 自平衡控制系统的建模与仿真[J]. *系统仿真学报*, 2004, 16(4): 839-841.
Tu Y W, Xu J Y, Zhang P R, et al. Modeling and simulation for self-balancing control system[J]. *Journal of System Simulation*, 2004, 16(4): 839-841.
- [16] 杨兴明, 丁学明, 张培仁, 等. 两轮移动式倒立摆的运动控制[J]. *合肥工业大学学报*, 2005(28): 11: 1485-1488.
Yang X M, Ding X M, Zhang P R, et al. Motion control of a two-wheel mobile inverted pendulum[J]. *Journal of Heifei University of Technology*, 2005, 28(11): 1485-1488.

Dynamic Model Analyzing and PID Control for a Two-wheeled Self-balancing Robot

LIANG Hua^{1,2}, LI Xiaohong³, YANG Guangxiang^{1,2}

(1. Chongqing Engineering Laboratory for Detection, Control and Integrated System,

Chongqing Technology and Business University;

2. Research Center of System Health Maintenance, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067;

3. College of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: A two-wheeled self-balancing robot (TWSBR) is a high-rank, unstable object with multi variables, strongly coupling and complicated dynamic nonlinear property. For the purpose of balance control of a TWSBR, the state equation is analyzed by Lagrange method and the controlling system is developed with a STM32 microcontroller in this paper. The proposed regulator aims at providing optimal performance, improving the stability and achieving robust of a TWSBR. According to the inputs of pitch angle and velocity, the output of a PWM signal is computed using PID algorithm to drive the motor. The simulation experiment shows that the presented algorithm has better dynamic performance and fast response time. The actual testing on a TWSBR proves the effectiveness of the proposed method.

Key words: two-wheeled self-balancing vehicle; PID; dynamics model; balance control; STM32

(责任编辑 游中胜)