运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160220

向量优化中改进集的一个性质*

林　安，刘学文

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要：改进集是研究向量优化问题十分重要的工具之一。基于改进集对偶锥和回收锥的一些基本性质在适当假设条件下证明了对于有限维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两个闭集 E_1,E_2,若 cl(cone(conv E_1))是点的,则 E_1,E_2 之和 E_1+E_2 仍为闭集。并提出了一些具体例子对主要结果进行了解释,指出若 cl(cone(conv E_1))不是点的,其结论不一定成立。

关键词：改进集;对偶性质;回收锥;向量优化

中图分类号：O221.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)02-0001-03

1 预备知识

众所周知,一些基础的数学工具对于研究向量优化理论与方法非常重要,如在目标空间诱导偏序关系的凸锥,集合的回收锥以及凸集和非凸集的分离定理等。特别地,文献[1-4]研究了凸锥等的一些基本性质及其在向量优化中的一些应用。

近年来,向量优化问题的近似解研究已引起了许多学者的重视,一些处理向量优化问题近似解的基本工具相继被提出。特别地,Chicco 等人在文献[5]中提出了有限维空间中改进集的概念,并基于改进集定义了向量优化问题一类统一的近似有效解—E-有效解,获得了这类解的一些性质。Gutiérrez 等人在文献[6]中将改进集的概念推广到一般实序线性空间中,研究了它的一些新性质。作为改进集的应用,赵等人进一步研究了改进集的性质,提出了向量优化问题新的解概念,获得了这些解的一些线性标量化性质等[7-9]。因此,如何进一步研究改进集的性质并给出其应用具有十分重要的理论意义。

受文献[5-6,10]中研究工作的启发,本文在适当假设条件下证明了两个闭集之和为闭集,并提出了一些具体的例子对主要结果进行了解释。

设 Y 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间,Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间,$K\subset Y$ 为具有非空拓扑内部的闭凸锥,K 称为点的,如果 $K\cap(-K)=\{0\}$,$\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间,$\mathbf{R}^n_+$ 为非负象限,$\mathbf{R}^n_{++}$ 为正象限。令 $A\subset Y$ 为非空集合,cl A, int A, conv A 分别表示 A 的拓扑闭包、拓扑内部和凸包。A 的生成锥定义为 cone $A=\{\lambda a\mid\lambda\geqslant 0,a\in A\}$。$A$ 的对偶锥,严格对偶锥以及回收锥分别定义为:

$$A^+=\{\lambda\in Y^*\mid\langle\lambda,y\rangle\geqslant 0,\ \forall\, y\in A\},A^{+s}=\{\lambda\in Y^*\mid\langle\lambda,y\rangle>0,\ \forall\, y\in A,y\neq 0\},$$

$$A^\infty=\{y\in Y\mid a+\mathbf{R}_{++}y\subset A,\ \forall\, a\in A\}。$$

下面首先给出本文将要用到的一些基本概念及引理。

定义 1[5-6]　$E\subset Y$ 非空。如果 $0\notin E$ 且 $E=E+K$,则称 E 为关于 K 的改进集。

注 1　如果 $E\subset Y$ 非空且满足 $E=E+K$,则称 E 为关于 K 的 free-disposal 集。

引理 1[6]　$E\subset Y$ 非空。如果 E 是关于 K 的改进集,则 $E^+\subset K^+$。此外,若 $E\subset K$,则 $E^+=K^+$。

注 2　注意到引理 1 的成立只需要假设 E 为关于 K 的 free-disposal 集。

* **收稿日期**:2015-05-18　**修回日期**:2015-12-02　**网络出版时间**:2016-1-20　21:26

资助项目:国家自然科学基金(No. 11301574)

作者简介:林安,女,研究方向为向量优化理论,E-mail: mathalin@163.com;**通信作者**:刘学文,教授,E-mail: highliuxue-2008@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2126.024.html

引理 2[10] 令 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$ 为非空闭集，如果 $E_1^\infty\cap(-E_2^\infty)=\{0\}$，则 E_1+E_2 是闭的。

引理 3[11-12] 令 $K\subset\mathbf{R}^n$ 为闭凸锥，则 K 为点的当且仅当 $\operatorname{int} K^+\neq\varnothing$。

2 改进集的一个性质

下面在适当条件下证明有限维空间 $Y=\mathbf{R}^n$ 中两个闭集之和仍然是闭集。

定理 1 设 $E_1\subset Y$ 是关于 K 的闭改进集，$E_2\subset K$ 是非空闭集。如果 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))$ 是点的，那么 E_1+E_2 是闭的。

证明 由引理2，只需证明 $E_1^\infty\cap(-E_2^\infty)=\{0\}$。因为 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))$ 是一个点闭凸锥，故由引理3可知，$\operatorname{int} E_1^+\neq\varnothing$。故存在 $\bar p\in\operatorname{int} E_1^+$，$\bar p=(\bar p_1,\bar p_2,\cdots,\bar p_n)\neq 0$。又由引理1有 $\bar p\in\operatorname{int} E_1^+\subset\operatorname{int} K^+$。结合文献[13]中的引理2.1的结论(i)，可以得到，对任意 $y\in K$，$y\neq 0$ 有 $\langle\bar p,y\rangle>0$，故 $\bar p\in K^{+s}$。不妨假设 $\bar p_1\neq 0$。令 $H_1=\{y\in\mathbf{R}^n\mid\langle\bar p,y\rangle\geqslant 0\}$。

下面证明 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))\subsetneqq H_1$。

由 $E_1^+=(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1)))^+$ 可以得到 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))\subset H_1$。进一步，令 $\bar y=(\bar p_2,-\bar p_1,0,0,\cdots,0)$，有 $\langle\bar p,\bar y\rangle=0$。这意味着 $\bar y\in H_1$ 且 $\bar y\notin\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))$。则：

$$E_1^\infty\subset(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1)))^\infty=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))\subsetneqq H_1。\tag{1}$$

此外，由 $E_2\subset K$ 可得

$$E_2^\infty\subset K。\tag{2}$$

因此有：

$$(-K)\cap H_1=\{0\}。\tag{3}$$

否则，假定存在 $0\neq\bar h\in H_1$，$-\bar h\in K$，由 $\bar h\in H_1$ 可得 $\langle\bar p,\bar h\rangle\geqslant 0$。然而，由 $\bar p\in K^{+s}$ 及 $-\bar h\in K$ 有 $\langle\bar p,\bar h\rangle<0$ 成立。这与 $\langle\bar p,\bar h\rangle\geqslant 0$ 产生矛盾。因此，由(1)、(2)以及(3)式，可以得到 $E_1^\infty\cap(-E_2^\infty)=\{0\}$。 证毕

注 3 如果去掉 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))$ 的点性假设，定理1的结论不一定成立。

例 1 令 $E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0.1\}$，$E_2=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{1}{x_1}-x_2\leqslant 0,x_1>0\right\}$，$K=\mathbf{R}_+^2$。显然 E_1 是闭的，且是关于 K 的改进集，$E_2\subset K$ 是闭的。此外，$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0\}$。故 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1))$ 不是点的且 $E_1+E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2>0.1\}$。因此，$E_1+E_2$ 不是闭的。

注 4 如果 E_1 不是关于 K 的改进集，定理1的结论不一定成立。

例 2 令 $E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，$E_2=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{1}{x_1}-x_2\leqslant 0,x_1>0\right\}$，$K=\mathbf{R}_+^2$。显然 E_1，E_2 是闭的，且 $E_2\in K$。令 $H=\{(x_1,x_2)\mid x_1-x_2=0\}$，则 $H\cap(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1)))=H\cap E_1=\{0\}$。

此外，$0\in E_1$ 且 $E_1+K=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0\}\neq E_1$。因此，$E_1$ 不是关于 K 的改进集且 $E_1+E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2>0\}$。

因此，E_1+E_2 不是闭的。

注 5 如果 $E_2\not\subset K$，定理1的结论不一定成立。

例 3 令 $E_1=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{1}{x_1}-x_2\leqslant 0,x_1>0\right\}$，$E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，$K=\mathbf{R}_+^2$。显然 E_1 是闭的，且是关于 K 的改进集，E_2 也是闭的。令 $H=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=0\}$，则 $H\cap(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\,E_1)))=H\cap\mathbf{R}_+^2=\{0\}$。

此外，$E_2\not\subset K$，$E_1+E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2>0\}$。因此，$E_1+E_2$ 不是闭的。

参考文献：

[1] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1972.

[2] Zălinescu C. Convex analysis in general vector spaces[M]. Singapore: World Scientific, 2002.

[3] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. J Optim

Theory Appl, 2001, 110: 413-427.

[4] Chiang Y. Characterizations for solidness of dual cones with applications[J]. J Glob Optim, 2012, 52: 79-94.

[5] Chicco M, Mignanego F, Pusillo L, et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. J Optim Theory Appl, 2011, 150: 516-529.

[6] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. Improvement sets and vector optimization[J]. Eur J Oper Res, 2012, 223: 304-311.

[7] Zhao K Q, Yang X M. A unified stability result with perturbations in vector optimization[J]. Optim Lett, 2013, 7: 1913-1919.

[8] Zhao K Q, Yang X M. *E*-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64: 739-752.

[9] Zhao K Q, Yang X M Peng J W. Weak *E*-optimal solution in vector optimization[J]. Taiwan J Math, 2013, 17: 1287-1302.

[10] Luc D T. Recession cones and the domination property in vector optimization[J]. Math Program, 1990, 49: 113-122.

[11] Holmes R B. Geometric functional analysis and its applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1975.

[12] Chen G Y, Huang X X, Yang X Q. Vector optimization set-valued and variational analysis[C]//Fandel G, Trockel W. Lecture notes in economics and mathematics sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[13] Karamardian S. Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps[J]. J Optim Theory Appl, 1976, 18: 445-454.

Operations Research and Cybernetics

A Characterization of Improvement Set in Vector Optimization

LIN An, LIU Xuewen

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Improvement set is one of the most important tools to study vector optimization problems. In this paper, by some basic dual characterizations of improvement sets and some tools including as recession cone, the closedness of a sum of two closed sets E_1 and E_2 is proved if cl(cone(conv E_1)) is pointed under some suitable assumption conditions in finite dimensional space $\mathbf{R}^n$. Moreover, some concrete examples also are presented to illustrate the main results and show that the closedness of a sum of two closed sets may be invalid if cl(cone(conv E_1)) is not pointed.

Key words: improvement sets; dual characterizations; recession cone; vector optimization

(责任编辑 黄 颖)