2016 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2016
第 33 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 33 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20160226

# 动态 VaR 约束下带阈值分红的保险最优投资*

孙宗岐[1]，刘宣会[2]，冀永强[1]，陈思源[1]
(1. 西安思源学院 高数教研室，西安 710038；2. 西安工程大学 理学院，西安 710048)

**摘要**：考虑受动态 VaR 约束时带阈值分红策略的保险公司最优投资策略问题，假定保险公司盈余服从扩散过程，在分红总量现值的期望最大化准则下，使用动态规划原理建立了受动态 VaR 约束的保险公司最优投资组合选择模型，通过求解 HJB 方程得到最优金融决策的显示解。

**关键词**：阈值分红策略；动态 VaR 约束；扩散过程；HJB 方程；随机 Lagrange 函数；K-T 点；投资策略

**中图分类号**：O211.63 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2016)02-0067-06

VaR 作为一种下侧风险，近年来已成为度量和控制金融风险的最常用工具之一。VaR 是指一定时间内，给定置信水平下的财富的最大可能损失。郭文旌[1]、王海燕[2]等用终端时刻的静态 VaR 风险为度量工具来研究保险资金管理等。对于连续时间的投资组合选择问题，怎么样将财富的最大可能损失控制在整个投资期内呢？在 2008 年前后 Cuoco，He，Isaenko 等人[3]首次在经典的 Merton 模型下引入动态 VaR 风险约束，从而实现了整个投资期内 VaR 风险的一致性约束。在国内，李仲飞等人[4]考虑了动态 VaR 约束下带随机波动的衍生证券最优投资策略问题。伊博等人[5-6]还考虑了动态 VaR 约束下具有随机波动的的个人投资主体的最优投资决策问题。但这些研究没有将动态 VaR 风险引入到保险资金的管理中来。

在保险实务中，当盈余达到一定的水平后，保险公司为了提高自身在保险行业的竞争力，会降低保费或者给投保者分红。1957 年 Finetti[7]首次研究了分红问题，自此不断有学者将分红引入到金融决策中来。目前最为流行的两种分红策略是常数边界分红策略和常数阈值分红策略。将分红引入到保险资金的管理与投资中来，目前已经成为一个研究的热点问题。杨鹏等人[8-9]在跳-扩散风险模型下分别研究了阈值分红和有界分红下的保险最优投资问题。这些研究一方面是没有给出最优分红界，另一方面更是没有考虑动态 VaR 风险的约束。

基于以上研究情况，文章考虑阈值分红策略下受动态 VaR 约束的的最优保险投资决策问题。文章采用布朗运动驱动的扩散过程来建立近似经典的 Cramer-Lundberg 模型，在阈值分红策略下的将分红总量现值的期望最大化，运用随机最优控制原理及库恩-塔克条件得到最优金融决策的显式解。

## 1 建立模型

### 1.1 模型描述

为使模型在数学推理上更为严格，假定所有随机过程均定义在完备概率空间$(\Omega, F, P)$上，产生的 $\sigma$-域$\{F_t: t>0\}$完备且右连续，允许连续交易且资产可任意分割，市场无摩擦因素。

盈余的经典模型是 $R_t = x_0 + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，$x_0$ 表示初始盈余，$p$ 表示保费率，$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 表示保险公司到时刻 $t$ 为止的累积索赔，其中 $Y_i$ 表示第 $i$ 次发生的索赔额，$Y_i$ 独立同分布，假设 $Y_i$ 服从参数为$\frac{1}{m}$的指数分布，$N(t)$是参数为 $\lambda$ 的泊松过程，表示到时刻 $t$ 为止的发生的索赔次数。为了安全起见，保费率需满足 $p=(1+\gamma)\lambda m$，$\gamma>0$ 称为相对安全负荷。根据 Taksar 等人[10]的研究，保险公司的盈余水平 $R(t)$可近似地用扩散过程 $\mathrm{d}R(t)=(p-\lambda E(Y))\mathrm{d}t+\lambda\sqrt{(E^2(Y)+D(Y))}\,\mathrm{d}B_t^1=\gamma\lambda m\mathrm{d}t+\sqrt{2}\lambda m\mathrm{d}B_t^1$ 来描述，若令 $\mu_0=\gamma\lambda m$，$\sigma_0=\sqrt{2}\lambda m$，则 $\mathrm{d}R(t)=\mu_0\mathrm{d}t+\sigma_0\mathrm{d}B_t^1$。保

* **收稿日期**：2015-05-14 **修回日期**：2015-12-25 **网络出版时间**：2016-1-20 21:25
**资助项目**：陕西省教育厅自然科学基础研究计划项目(No. 2013jk0594)；西安思源学院科研项目(No. 2015xjlx23)
**作者简介**：孙宗歧，男，讲师，研究方向为随机过程与数理金融，E-mail：szqi200679@sina.com
**网络出版地址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2125.012.html

险公司可在破产前将部分盈余投资到一个风险资产,其价格过程 $P(t)$ 满足 $\mathrm{d}P(t)=P(t)(\mu_1\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_t^2)$, $P(0)=p_0$。$r$ 是无风险利率,$\mu_1$ 是风险资产收益率,$\sigma_1$ 是波动率。设投资于风险资产(比如:股票)的额度为 $\pi_t$,则

$$\mathrm{d}R_t^\pi=\mu_0\mathrm{d}t+\sigma_0\mathrm{d}B_t^1+\pi_t(\mu_1\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_t^2)+(R_t^\pi-\pi_t)r\mathrm{d}t,$$

即 $\mathrm{d}R_t^\pi=[\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^\pi r]\mathrm{d}t+\sigma_0\mathrm{d}B_t^1+\pi_t\sigma_1\mathrm{d}B_t^2$,亦即

$$\mathrm{d}R_t^\pi=(R_t^\pi r+\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t)\mathrm{d}t+\hat{\pi}_t^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(t),\tag{1}$$

其中 $\hat{\pi}_t=\begin{bmatrix}1\\ \pi_t\end{bmatrix}$,$\hat{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_0\\ \mu_1-r\end{bmatrix}$,$\hat{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{bmatrix}$,$W(t)=\begin{bmatrix}B_t^1\\ B_t^2\end{bmatrix}$。所有平方可积且 $F_t$ 适应的策略 $\pi$ 的集合为可行集 $\Pi$。

### 1.2 动态 VaR 的定义

由(1)式有
$$R_t^\pi=x_0\mathrm{e}^{rt}+\int_0^t\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_s\mathrm{e}^{(t-s)r}\mathrm{d}s+\int_0^t\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{e}^{(t-s)r}\mathrm{d}W(s),$$

同理有
$$R_{t+h}^\pi=R_t^\pi\mathrm{e}^{rh}+\int_t^{t+h}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_s\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\mathrm{d}W(s)。$$

忽略很短的时间 $h$ 内 $\hat{\pi}^{\mathrm{T}}(s)$ 的变化,有 $R_{t+h}^\pi\text{-}R_t^\pi\mathrm{e}^{rh}=\dfrac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t+\int_t^{t+h}\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(s)$。根据 VaR 的定义,对于给定置信水平 $\alpha$,有:

$$VaR_t^{\pi,\alpha}=\inf\{L\geqslant0:P(R_t^\pi\mathrm{e}^{rh}-R_{t+h}^\pi\geqslant L/F_t)\leqslant\alpha\}=(Q_t^{\pi,\alpha})^-,(Q_t^{\pi,\alpha})=\sup\{L\in R:P(R_{t+h}^\pi-R_t^\pi\mathrm{e}^{rh}\leqslant L/F_t)<\alpha\}。$$

$$P(R_{t+h}^\pi\text{-}R_t^\pi\mathrm{e}^{rh}\leqslant L\mid F_t)=P\left\{\left(\frac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t+\int_t^{t+h}\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(s)\leqslant L\right)\mid F_t\right\}=$$

$$P\left(\int_t^{t+h}\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(s)\leqslant L-\frac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\right)=$$

$$P\left(\frac{\int_t^{t+h}\mathrm{e}^{(t+h-s)r}\hat{\pi}_s^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(s)}{\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}}\leqslant\frac{L-\frac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t}{\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}}\right)=N\left(\frac{L-\frac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t}{\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}}\right)<\alpha。$$

所以 $VaR_s^{\pi,\alpha}=(Q_s^{\pi,\alpha})^-=\left\{-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}-\dfrac{\mathrm{e}^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\right\}^+$,其中 $N^{-1}(\alpha)$ 是标准正态分布的分位数,$x^+=\max\{0,x\}$。

### 1.3 分红策略

假设保险公司对股东或者投保人考虑以 $b>0$ 为界进行分红,即当 $R(t)>b$ 时保险公司将按一个有界的分红率 $0\leqslant l\leqslant\beta$ 进行分红直至破产为止,$l$ 的上界 $\beta<p$。设 $D(t)$ 为时刻 $t$ 的分红总量,称 $\overline{R}(t)=R(t)-D(t)$ 为修正盈余。称 $\tau=\inf\{t\geqslant0:\overline{R}(t)<0|\overline{R}(0)=x\}$ 为破产时刻,则 $D=\int_0^\tau\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}D(t)=r\int_0^\tau\mathrm{e}^{-\delta t}I\{R(t)>b\}\mathrm{d}t$ 是破产前所有红利的现值,$\delta$ 为贴现率。$V(x,b)=E[D|\overline{R}(0)=x]$ 表示到破产为止分红总量现值的期望。

由 Schmidli[11] 的文献有下面的引理。

**引理 1** 设 $V(x)=\max\limits_{\pi_t,l,b}V(x,b)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的二次连续可微函数,则 $V(x)$ 满足如下 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $\max\limits_{\substack{0\leqslant l\leqslant\alpha,b>0\\ \pi_t\in\Pi}}\left\{\dfrac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x)+l+[(\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^\pi r)-l]V'(x)-\delta V(x)\right\}=0$。

由文献[12]可知满足 HJB 方程的分红策略就是最优分红策略。显然由上述方程不难得到最优分红率为

$$l^*=\begin{cases}0,V'(x)>1\\ l,V'(x)=1,0\leqslant l\leqslant\beta\\ \beta,V'(x)<1\end{cases}。$$

## 2 求解模型

本文的目的是在 $t\leqslant\tau$ 时,求解下列最优控制问题

$$V(x)=\max_{\substack{0\leqslant l\leqslant\alpha,b>0\\ \pi_t\in\Pi}}V(x,b),$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\mathrm{d}\overline{R}_t=(R_1^\pi r+\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t)\mathrm{d}t+\hat{\pi}_t^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(t)-\mathrm{d}D(t),\\ VaR_t^\pi\leqslant\overline{VaR}(t,R_t^\pi)。\end{cases}\tag{2}$$

### 2.1 动态 VaR 控制的等价条件

**定理 1**　对于给定的动态 VaR 风险水平$\overline{VaR}(s,R_s^\pi)$，当 $0<k^2-\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}\leqslant\dfrac{c^2}{\sigma_0^2}$时，$VaR_s^{\pi,\alpha}\leqslant\overline{VaR}(s,R_s^\pi)$等价于 $\pi\in[\pi_1,\pi_2]$，其中 $\pi_1=\dfrac{c(\mu_1-r)-k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$，$\pi_2=\dfrac{c(\mu_1-r)+k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$，$\Delta=(c^2\sigma_1^2+\sigma_0^2(\mu_1-r)^2-k^2\sigma_0^2\sigma_1^2)$。

**证明**
$$VaR_s^{\pi,\alpha}=(Q_s^{\pi,\alpha})^-=\left\{-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}-\frac{e^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\right\}^+,$$

即
$$-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}-\frac{e^{rh}-1}{r}\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\leqslant\overline{VaR}(s,R_s^\pi),$$

$$-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{rh}+1}{e^{rh}-1}\cdot\frac{r}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}-\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\leqslant\frac{r}{e^{rh}-1}\overline{VaR}(s,R_s^\pi),$$

$$-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{rh}+1}{e^{rh}-1}\cdot\frac{r}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)}\leqslant\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+\frac{r}{e^{rh}-1}\overline{VaR}(s,R_s^\pi)。$$

令 $k=-N^{-1}(\alpha)\sqrt{\dfrac{e^{rh}+1}{e^{rh}-1}\cdot\dfrac{r}{2}}$，$c=\mu_0+\dfrac{r}{e^{rh}-1}\overline{VaR}(s,R_s^\pi)$，则有 $k\sqrt{\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2}\leqslant\pi_t(\mu_1-r)+c$，即

$$[k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^2-2c(\mu_1-r)\pi_t+k^2\sigma_0^2-c^2\leqslant 0。$$

当 $0<k^2-\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}\leqslant\dfrac{c^2}{\sigma_0^2}$ 时，令 $\Delta=(c^2\sigma_1^2+\sigma_0^2(\mu_1-r)^2-k^2\sigma_0^2\sigma_1^2)$，则 $\pi_1=\dfrac{c(\mu_1-r)-k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$，$\pi_2=\dfrac{c(\mu_1-r)+k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$。进而动态 VaR 约束等价于 $\pi_t^*\in[\pi_1,\pi_2]$。　证毕

### 2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程及其求解

#### 2.2.1 当 $0\leqslant x\leqslant b$ 时，受动态 VaR 约束的最优分红界、分红现值最大期望与最优投资策略

**定理 2**　当 $0\leqslant x\leqslant b$ 时，若 $V'(x)>1$，$V''(x)<0$，则最优分红率 $l^*=0$，最优分红界 $b^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right)}{\rho_1-\rho_0}$，最优分红为 $V(x)=\dfrac{h_1(x)}{h_1'(b^*)}$。其中 $\rho_0<0<\rho_1$ 是特征方程$\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\rho^2+(\mu_0+R_t^\pi r)\rho-\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+\delta\right)=0$ 的解，$h_1(x)=e^{\rho_0 x}-e^{\rho_1 x}$。

**证明**　当 $0\leqslant x\leqslant b$，假设 $V'(x)>1$，$V''(x)<0$，则最优分红率 $l^*=0$。$V(x,b)$满足 HJB 方程

$$\frac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x,b)+[\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^\pi r]V'(x,b)-\delta V(x,b)=0。$$

由一阶最优性条件得 $\pi_t^*=-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x,b)}{\sigma_1^2V''(x,b)}$，代入上述方程有

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2+(\mu_0+R_t^\pi r)\frac{V'(x,b)}{V''(x,b)}-\frac{1}{2}\frac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}\left(\frac{V'(x,b)}{V''(x,b)}\right)^2-\delta\frac{V(x,b)}{V''(x,b)}=0。$$

由文献[13-14]可知 $V(x,b)=C_1(b)h_1(x)$，其中满足：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)h_1''(x)+[\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^\pi r]h_1'(x)-\delta h_1(x)=0,\\ h_1(0)=0。\end{cases}$$

即$\dfrac{1}{2}\sigma_0^2+(\mu_0+R_t^\pi r)\dfrac{h_1'(x)}{h_1''(x)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}\left(\dfrac{h_1''(x)}{h_1''(x)}\right)^2-\delta\dfrac{h_1(x)}{h_1''(x)}=0$。其特征方程为：

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2\rho^2+(\mu_0+R_t^\pi r)\rho-\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+\delta\right)=0,$$

解之得 $\rho_0=\dfrac{-(\mu_0+R_tr)-\sqrt{\Delta}}{\sigma_0^2}<0$，$\rho_1=\dfrac{-(\mu_0+R_tr)+\sqrt{\Delta}}{\sigma_0^2}>0$，其中 $\Delta=(\mu_0+R_tr)^2+\sigma_0^2\left(\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+2\delta\right)$。如果不考虑常数因子，由于初值条件 $h_1(0)=0$，则 $h_1(x)$有唯一解 $h_1(x)=e^{\rho_0 x}-e^{\rho_1 x}$。再由边界条件 $V'(b,b)=1$ 可得 $C_1(b)=\dfrac{1}{h_1'(b)}$，即 $V(x,b)=\dfrac{h_1(x)}{h_1'(b)}$。

最优红利界是：当 $b=b^*$ 时，$h_1'(b)$ 最小。假设 $b^*>0$ 时，满足 $h_1''(b^*)=0$，可解得：$b^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right)}{\rho_1-\rho_0}$，即最优分红为 $V(x)=\dfrac{h_1(x)}{h_1'(b^*)}$。 证毕

接下来的目的是在 $0\leqslant x\leqslant b, t\leqslant\tau$ 时，求解最优投资策略问题：

$$\max_{\pi_t\in\Pi}\left\{\frac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x)+[\mu_0+\pi_t(u_1-r)+R_t^\pi r]V'(x)-\delta V(x)\right\}=0, 0\leqslant x\leqslant b,$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}\mathrm{d}\bar{R}_t=(R_t^\pi r+\hat{\mu}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_t\mathrm{d}t+\hat{\pi}^{\mathrm{T}}\hat{\sigma}\mathrm{d}W(t)-\mathrm{d}D(t),\\ VaR_t^{\pi,\alpha}\leqslant\overline{VaR}(t,R_t^\pi)。\end{cases}\tag{3}$$

**定理** 3 在动态 VaR 约束下，最优化问题(3)的最优投资策略为：

$$\pi_t^*=\begin{cases}-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}, \pi_1\leqslant-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}\leqslant\pi_2,\\ \pi_1, -\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}<\pi_1,\\ \pi_2, -\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}>\pi_2。\end{cases}$$

其中 $V(x)=\dfrac{h_1(x)}{h_1'(b^*)}$。

**证明** 当 $0\leqslant x\leqslant b, t\leqslant\tau$ 时，优化问题(2)作为不等式约束的非线性规划，可建立随机 Lagrange 函数

$$L=\left\{\frac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x)+[\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^\pi r]V'(x)-\delta V(x)\right\}+$$
$$\lambda([k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^2-2c(\mu_1-r)\pi_t+k^2\sigma_0^2-c^2),$$

由一阶最优性条件有

$$\pi_t^*\sigma_1^2V''(x)+(\mu_1-r)V'(x)+\lambda\{2[k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^*-2c(\mu_1-r)\}=0,$$

进而 $\lambda=-\dfrac{\pi_t^*\sigma_1^2V''(x)+(\mu_1-r)V'(x)}{2[k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^*-2c(\mu_1-r)}$。

互补松驰条件为 $\lambda([k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^2-2c(\mu_1-r)\pi_t+k^2\sigma_0^2-c^2)=0$，即 $\lambda=0$ 或 $\pi^*=\pi_1$ 或 $\pi^*=\pi_1$ 时互补松弛条件成立。下面分情况来讨论。

若 $\lambda=0$，显然可得 $\pi_t^*=-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}$，此时和无约束时的结果一致，说明这种情况下约束非积极。

若 $\lambda\neq0$，如果 $\pi_t^*$ 满足动态 VaR 约束，即 $\pi_1\leqslant\pi_t^*=-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}\leqslant\pi_2$，那么此时最优投资策略就是 $\pi_t^*=-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}$。如若不然，即 $\pi_t^*<\pi_1$ 或者 $\pi_t^*>\pi_2$。

当 $-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}<\pi_1$ 时，当然 $-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}<\pi_2$。因此先讨论 $\pi_1>-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}$，将 $\pi_1=\dfrac{c(\mu_1-r)-k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$ 代入(3)式，注意到 $V''(x)<0$，有

$$\pi_t^*\sigma_1^2V''(x)+(\mu_1-r)V'(x)<0, 2[k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^*-2c(\mu_1-r)<0,$$

所以 $\lambda<0$，即 $\pi_1$ 是 K-T(库恩-塔克)点。又由于该问题是凸规划问题，所以 $\pi^*=\pi_1$。

当 $-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}>\pi_2$ 时，显然有 $-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}>\pi_1$。将 $\pi_2=\dfrac{c(\mu_1-r)+k\sqrt{\Delta}}{k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2}$ 代入(3)式，注意到 $V''(x)<0$，有 $\pi_t^*\sigma_1^2V''(x)+(\mu_1-r)V'(x)>0, 2[k^2\sigma_1^2-(\mu_1-r)^2]\pi_t^*-2c(\mu_1-r)>0$，所以 $\lambda<0$，即 $\pi_1$ 是 K-T(库恩-塔克)点。又由于该问题是凸规划问题，所以 $\pi^*=\pi_2$。 证毕

2.2.2 当 $x>b$ 时，受动态 VaR 约束的最优分红界、分红比例、分红现值最大期望与最优投资策略

**定理** 4 当 $x>b$ 时，若 $0<V'(x)\leqslant1$，则最优分红比例 $l^*=\beta$，最优分红界 $b^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{u_0^2}{u_1^2}\right)}{u_1-u_0}$，最优分红为 $V(x)=$

$\dfrac{\beta}{\delta}+\dfrac{h_2(x)}{h_2'(b^*)}$，$h_2(x)=e^{u_0x}-e^{u_1x}$。其中 $u_0<0<u_1$ 是特征方程

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2u^2+(\mu_0+R_tr-\beta)u-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+2\delta\right)=0$$

的解。

**证明**　当 $x>b$ 时，$V(x,b)$满足 HJB 方程

$$\beta+\frac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x,b)+[\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_tr-\beta]V'(x,b)-\delta V(x,b)=0,$$

由一阶最优性条件有 $\pi_t^*=-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x,b)}{\sigma_1^2V''(x,b)}$。根据文献[13-14]有 $V(x,b)=\dfrac{\beta}{\delta}+C_2(b)h_2(x)$，且满足初值条件 $h_2(0)=0$。此时 HJB 方程相应的特征方程为 $\dfrac{1}{2}\sigma_0^2u^2+(\mu_0+R_tr-\beta)u-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+2\delta\right)=0$，解之得 $u_0=\dfrac{-(\mu_0+R_tr-\beta)-\sqrt{\Delta}}{\sigma_0^2}<0$，$u_1=\dfrac{-(\mu_0+R_tr-\beta)+\sqrt{\Delta}}{\sigma_0^2}>0$，其中 $\Delta=(\mu_0+R_tr-\beta)^2+\sigma_0^2\left(\dfrac{(\mu_1-r)^2}{\sigma_1^2}+2\delta\right)$。

如果不考虑常数因子，由于初值条件 $h_2(0)=0$，则有唯一解 $h_2(x)=e^{u_0x}-e^{u_1x}$，由于 $V(x,b)$二阶连续可微，再由初始条件 $V'(b,b)=1$ 可知 $C_2(b)=\dfrac{1}{h_2'(b)}$，即 $V(x,b)=\dfrac{\beta}{\delta}+\dfrac{h_2(x)}{h_2'(b)}$。最优红利界是：当 $b=b^*$ 时，$h_2'(b)$最小。假设 $b^*>0$ 时，满足 $h_2''(b^*)=0$，同理可解得：$b^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{u_0^2}{u_1^2}\right)}{u_1-u_0}$，即最优分红为 $V(x)=\dfrac{\beta}{\delta}+\dfrac{h_2(x)}{h_2'(b^*)}$。　证毕

最后目的是在 $x>b,t\leqslant\tau$ 时，求解最优控制问题

$$\max_{\pi_t\in\Pi}\left\{\frac{1}{2}(\sigma_0^2+\pi_t^2\sigma_1^2)V''(x)+\beta+[(\mu_0+\pi_t(\mu_1-r)+R_t^{\pi}r)-\beta]V'(x)-\delta V(x)\right\}=0,x\geqslant b,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}d\overline{R}_t=(R_t^{\pi}r+\overline{\mu}^{T}\overline{\pi}\pi_t)dt+\overline{\pi}_t^{T}\overline{\sigma}dW(t)-dD(t),\\ VaR^{\pi,\alpha}\leqslant\overline{VaR}(t,R_t^{\pi})。\end{cases}\tag{4}$$

**定理** 5　在动态 VaR 约束下，最优化问题(4)的最优投资策

$$\pi_t^*=\begin{cases}-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)},\pi_1\leqslant-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}\leqslant\pi_2,\\ \pi_1,-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}<\pi_2,\\ \pi_2,-\dfrac{(\mu_1-r)V'(x)}{\sigma_1^2V''(x)}>\pi_2。\end{cases}$$

其中 $V(x)=\dfrac{\beta}{\delta}+\dfrac{h_2(x)}{h_2'(b^*)}$。

定理 5 的证明与定理 2 的证明类似。

## 参考文献：

[1] 郭文旌，李心丹. VaR 限制下的最优保险投资策略选择[J]. 系统管理学报，2009，18(5)：583-587.
Guo W J，Li X D. Optimal portfolio selection bounded by VaR for insurer[J]. Journal for Systems & Management，2009，18(5)：583-587.

[2] 王海燕，彭大衡. 再保险-投资的 M-V 及 M-VaR 最优策略[J]. 经济数学，2011，28(3)：72-76.
Wang H Y，Peng D H. Optimal reinsurance-investment strategies under M-V and M-VaR models[J]. Journal for quantitative economic，2011，28(3)：72-76.

[3] Cuoco D，He H，Isaenko S. Optimal dynamic trading strategies with risk limits[J]. Operations Research，2008，56(2)：358-368.

[4] 李仲飞，李克勉. 动态 VaR 约束下带随机波动的衍生证券最有投资策略[J]. 中山大学学报：社会科学版，2010，50(3)：184-192.
Li Z F，Li K M. Optimal derivative investment strategies with stochastic volatility under dynamic VaR constraints[J]. Journal of Sun Yatsen University：Social Science Edition，2010，50(3)：184-192.

[5] 伊博，李仲飞，曾燕. 动态 VaR 和随机波动率模型下的最优投资策略[J]. 运筹学学报，2012，16(2)：77-90.

Yi B, Li Z F, Zeng Y. Optimal investment strategy with stochastic volatility and dynamic VaR constraint[J]. Operations research transactions, 2012, 16(2): 77-90.

[6] 伊博,李仲飞,曾燕.随机波动率市场存在股票误价时的最优投资策略[J].应用概率统计,2013,29(3):261-274.

Yi B, Li Z F, Zeng Y. Optimal portfolio strategies with mispricing and stochastic volatility[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2013, 29(3): 261-274.

[7] De Finettib. Su unimpostazione alternative dell teoria collettiva del rischio[J]. Transactions of the XV International Congress of Actuaries, 1957, 2: 433-443.

[8] 杨鹏.边界分红策略下跳-扩散风险模型最优投资[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(6):92-97.

Yang P. Under barrier dividend the optimal investment for jump-diffusion risk process[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(6): 92-97.

[9] 杨鹏.具有阀值分红策略的最优投资问题探讨[J].统计与决策,2012,369(21):56-58.

Yang P. The problem of optimal investment with threshold dividend[J]. Statistics and Decision, 2012, 369(21): 56-58.

[10] Taksar M, Markussen C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios[J]. Finance and Stochastic, 2003(7): 97-121.

[11] Schmidli H. Stochastic control in insurance[M]. London: Springer Verlag, 2008.

[12] Gerber H U, Shiu E S W. Optimal dividends: analysis with Brownian motion[J]. North American Actuarial Journal, 2004, 8(1): 1-19.

[13] Gerber H U, Shiu E S W. On optimal dividend strategies in the compound Poisson model[J]. North American Actuarial Journal, 2006, 10(2): 76-93.

[14] 秦伶俐,吴黎军,王生喜.具有常数红利界的风险模型及最优红利界的精确解[J].统计与决策,2008,256(13):30-32.

Qin L L, Wu L J, Wang S X. Risk model and exact solutions for optimal dividend with constant dividend community[J]. Statistics and Decision, 2008, 256(13): 30-32.

## Optimal Approach for Insurance Company with Threshold Dividend Strategy under Dynamic VaR Constraint

SUN Zongqi[1], LIU Xuanhui[2], JI Yongqiang[1], CHEN Siyuan[1]

(1. Department of Mathematics, Xi'an Siyuan University, Xi'an 710038;
2. College of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

**Abstract**: Under the hypothesis that the insurance's reserve price follows a diffusion process, an optimal portfolio problem that combines a threshold dividend strategy is studied under dynamic VaR constrain. Based on the criterion of maximizing the expected present value of dividend payments until ruin, using dynamic programming principle the optimal financial approach was established by solving the HJB equation.

**Key words**: threshold dividend strategy; dynamic VaR constrain; diffusion processes; HJB equation; stochastic Lagrange function; K-T point; investment approach

(责任编辑 黄 颖)