DOI:10.11721/cqnuj20160212

$OT(X,Y;\theta)$的一类特殊子半群 M_e 及其极大(小)元*

莫 贵 圈
(贵州师范学院 数学与计算机科学学院，贵阳 550018)

摘要：由于保序夹心半群 $OT(X,Y;\theta)$ 的幂等元集 $E(OT(X,Y;\theta))$ 不构成子半群，对 $E(OT(X,Y;\theta))$ 加某些限制条件后，得到幂等元集 $E(OT(X,Y;\theta))$ 的真子集 M_e，证明了 M_e 是半群 $OT(X,Y;\theta)$ 的子半群，讨论了 M_e 在自然偏序下的一些结论，此外，还描述了子半群 M_e 的极大(极小)元与覆盖元。

关键词：子半群 M_e；自然偏序；极大元；极小元；覆盖元

中图分类号：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2016)02-0080-05

自然序关系在半群理论的研究中有非常重要的意义，多年来它一直是半群理论的一个重要研究课题。1952 年，Vager 研究了逆半群上的“自然偏序”，设 S 是一个逆半群，E_S 是 S 中所有幂等元的构成集合，S 上的自然序关系定义为：

$$a\leqslant b\Leftrightarrow \exists\, e\in E_S,\ni a=eb。 \tag{1}$$

这种序关系于半群的乘法是左、右相容的，即对任意 $a,b,c\in S$，$a\leqslant b$ 蕴涵 $ac\leqslant bc$ 且 $ca<cb$。经历了 30 年，这个概念被 Hartwig[1] 和 Nambooripad[2] 推广到正则半群上，最常用的定义为：

$$a\leqslant b\Leftrightarrow \exists\, e,f\in E_S,\ni a=eb=bf。 \tag{2}$$

然而这种序关系于半群的乘法不是左、右相容的。当半群 S 是逆半群时，这种群关系恰好是(1)。Mitsch[3] 又把正则半群上的自然偏序关系进一步推广到任意半群 S 上，定义为：

$$a\leqslant b\Leftrightarrow \exists\, x,y\in S^1,\ni a=xb=by,a=xa。 \tag{3}$$

当半群 S 是正则半群时，这种关系恰好是(2)。设 T_X 是 X 上的全变半群，在文献[4]中赋予自然偏序关系(2)的半群 T_X，根据变换的像和核刻画了这个自然序，讨论了自然偏序关系于变换乘法的相容性，并刻画了极大元、极小元和覆盖元。在文献[5]中，裴慧生、邓伟娜研究了保持序和等价关系的自然偏序变换半群，讨论何时这个半群中的两个元素是相关的，然后确定这个半群中那些关于自然偏序是相容的元素，并刻画了极大元、极小元和覆盖元。

设 X,Y 任意的非空全序集合，$OT(X,Y)$是 X 到 Y 的全体保序映射构成的集合，θ 是 Y 到 X 的一个确定的保序映射。$\forall\,\alpha,\beta\in OT(X,Y)$定义：$\alpha\circ\beta=\alpha\theta\beta$，这里 $\alpha\theta\beta$ 表示一般映射的合成，则 $OT(X,Y)$关于运算$\circ$构成一个半群，称为保序夹心半群，记为 $OT(X,Y;\theta)$。当 X,Y 都是有限集合且 $|X|>1$，$|Y|>1$ 时，称保序夹心半群 $OT(X,Y;\theta)$为有限保序夹心半群。文献[6]研究了 $OT(X,Y;\theta)$ 的正则元、幂等元的一些特殊性质。本文未定义的术语及符号见文献[7-8]。

1 预备知识

引理 1 记 $\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r & \cdots\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r & \cdots\end{pmatrix}\in OT(X,Y;\theta)$，则 $\alpha\in E(OT(X,Y;\theta))\Leftrightarrow b_i\theta\in A_i,i\geqslant 1$。

* **收稿日期**：2015-09-07 **修回日期**：2015-12-08 **网络出版时间**：2016-1-20 21:26
资助项目：贵州师范学院应用数学重点支持学科项目
作者简介：莫贵圈，女，讲师，研究方向为半群代数，E-mail：moquanquan@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2126.040.html

半群 $OT(X,Y;\theta)$的幂等元集 $E(OT(X,Y;\theta))$不构成 $OT(X,Y;\theta)$的子半群，例如：设 $X=\{1,2,3,\cdots,15\}$，$Y=\{1,2,3,\cdots,14\}$，令 $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15\\1&1&2&3&3&4&5&7&8&9&10&11&12&14&14\end{pmatrix}$，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\1&1&4&6&6&6&8&10&10&10&10&13&15&15\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\2&4&4&6&7&9&9&9&10&11&12&13&13&14\end{pmatrix},$$

则 $\alpha\theta\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\2&2&4&6&6&6&9&10&10&10&10&13&14&14\end{pmatrix}$。

由引理 1 知，$\alpha,\beta\in E(OT(X,Y;\theta))$，又因为$\{7\}\in X/\ker(\alpha\theta\beta)$，7 在 $\alpha\theta\beta$ 下的像是 9，但是 9 在 θ 下的像是 $8\notin\{7\}$，所以由定理 1 知 $\alpha\circ\beta=\alpha\theta\beta\notin E(OT(X,Y;\theta))$。因此，考虑对 $E(OT(X,Y;\theta))$的元素加限制条件，得到幂等元集 $E(OT(X,Y;\theta))$的真子集 M_e。

定义 1　记 $M_e=\{g:Xe\subseteq Xg$ 且 $\forall b\in\{Xg-Xe\},|bg^{-1}|=1,e,g\in E(OT(X,Y;\theta))\}$。

注　在 M_e 定义中，若将条件 $\forall b\in\{Xg-Xe\},|bg^{-1}|=1$ 去掉，则 M_e 变为$\{g:Xe\subseteq Xg$ 且 $e,g\in E(OT(X,Y;\theta))\}$，将这个集合记为 N_e，易知 N_e 不构成子半群。例如：设 $X=\{1,2,\cdots,6\}$，$Y=\{1,2,\cdots,6\}$，令 θ 是 Y 到 X 的恒等映射，即 $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$，$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&6&6&6&6\end{pmatrix}\in E(OT(X,Y;\theta))$，$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&3&6&6&6\end{pmatrix}\in N_e$，$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&1&4&4&6&6\end{pmatrix}\in N_e$，则 $\alpha\theta\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&4&6&6&6\end{pmatrix}$。因为 $\{2,3\}\in X/\ker(\alpha\theta\beta)$，$\{2,3\}$在 $\alpha\theta\beta$ 下的像是 4，但是 4 在 θ 下的像是 $4\notin\{2,3\}$，所以由定理 1 知 $\alpha\theta\beta\notin E(OT(X,Y;\theta))$，故 $\alpha\theta\beta\notin N_e$。

2 主要结果及其证明

由于定理的证明需要用到以下两个引理，因此，先介绍这两个引理。

引理 2[6]　若 $f\in E(OT(X,Y;\theta))$，则 $Xf=Y\theta f$ 且 $\theta|_{Xg}$是单射。

引理 3[6]　设 $\forall f,g\in E(OT(X,Y;\theta))$，若 $Xf\subseteq Xg$，则 $f\circ g=f\in E(OT(X,Y;\theta))$且 $g\circ f\in E(OT(X,Y;\theta))$。

2.1 M_e 是子半群定理的证明

定理 1　M_e 是 $OT(X,Y;\theta)$的子半群。

证明　首先，证 $Xe\subseteq Xg\theta h$。$\forall g,h\in M_e$，则 $Xe\subseteq Xg$，$Xe\subseteq Xh$，则 Xg，Xh 之间的关系有以下两种：具有包含关系或不具有包含关系。

若 Xg 与 Xh 之间具有包含关系，不妨设 $Xg\subseteq Xh$，则由引理 3 知 $g\circ h\in M_e$。

若 Xg 与 Xh 之间不具有包含关系，$\forall a\in Xg$，当 $a\in Xe\subseteq Xg$ 时，有 $a\in Xh$，所以$(ae^{-1})(e\theta)=(ag^{-1})(g\theta)=(ah^{-1})(h\theta)$。又因为 $e,g,h\in E(OT(X,Y;\theta))$，所以 $Xe\theta\triangleright X/(\ker e)$，$Xg\theta\triangleright X/(\ker g)$，$Xh\theta\triangleright X/(\ker h)$，所以 $a\theta\in ae^{-1}$，$a\theta\in ag^{-1}$，$a\theta\in ah^{-1}$，所以$ae^{-1}\cap ag^{-1}\cap ah^{-1}\neq\varphi$，故$(ag^{-1})(g\theta h)=a$。

当 $a\in\{Xg-Xe\}$时，因为 $g\in M_e$，所以 $|ag^{-1}|=1$。若 $a\theta\in B_i\in X/(\ker h)$且 $B_ih\in Xe$，则 $a\theta h\in Xe$，此时 $Xg\theta h=Xe$。若 $a\theta\in B_i\in X/(\ker h)$且 $B_ih\notin Xe$，则 $a\theta h\in\{Xh-Xe\}$，此时 $Xg\theta h\supset Xe$。

综上得 $Xe\subseteq Xg\theta h$。其次，证 $\forall d\in\{Xg\theta h-Xe\}$，有 $|d(g\theta h)^{-1}|=1$。$\forall a_1,a_2\in\{Xg-Xe\}$，由 $g\in M_e$ 知 $|a_1g^{-1}|=1$，$|a_2g^{-1}|=1$，则 $a_1\theta h$，$a_2\theta h$ 有以下 3 种情况：

1）若 $a_1\theta h\in Xe$，$a_2\theta h\in Xe$，则显然 $Xg\theta h=Xe$。

2）若 $a_1\theta h\notin Xe$，$a_2\theta h\notin Xe$，设 $d_1=a_1\theta h$，$d_2=a_2\theta h$，则 $d_1\neq d_2$。（否则，$d_1=a_1\theta h=a_2\theta h=d_2$，$d_1\notin Xe$，则 $|d_1h^{-1}|\geqslant2$，与 M_e 的定义 $\forall a\in\{Xh-Xe\}$，$|ah^{-1}|=1$ 矛盾），所以 $|d_1(g\theta h)^{-1}|=1$，$|d_2(g\theta h)^{-1}|=1$。

3) 若 $d_1=a_1\theta h$,$d_2=a_2\theta h$ 中只有一个属于 Xe,不妨设 $d_1=a_1\theta h\in Xe$,$d_2=a_2\theta h\notin Xe$,则 $|d_2(g\theta h)^{-1}|=1$。综上得 $\forall d\in\{Xg\theta h-Xe\}$,有 $|d(g\theta h)^{-1}|=1$。

最后,证 $g\circ h\in E(OT(X,Y;\theta))$。$\forall d\in Xg\theta h$,当 $d\in Xe$ 时,$d\in Xg$,$d\in Xh$。

所以 $(de^{-1})(e\theta)=(dg^{-1})(g\theta)=(ah^{-1})(h\theta)$,因为 $Xe\theta\triangleright X/(\ker e)$,$Xg\theta\triangleright X/(\ker g)$,$Xh\theta\triangleright X/(\ker h)$,所以 $de^{-1}\cap dg^{-1}\cap dh^{-1}\neq\varphi$,所以 $(dg^{-1})(g\theta h)=d$,从而 $dg^{-1}=d(g\theta h)^{-1}$。

又因为 $g\in E(OT(X,Y;\theta))$,所以 $d\in dg^{-1}$,故 $d\in d(g\theta h)^{-1}$。当 $d\in\{Xg\theta h-Xe\}$ 时,由上述证明知 $|d(g\theta h)^{-1}|=1$。又因为 $d\in\{Xg\theta h-Xe\}$,所以 $d\in\{Xh-Xe\}$,所以 $|dh^{-1}|=1$。又因为 $h\in E(OT(X,Y;\theta))$,所以 $d\theta=d$,所以 $d\theta\in d(g\theta h)^{-1}$,综上得 $Xg\theta h\triangleright X/\ker(g\theta h)$,所以 $g\theta h\in E(OT(X,Y;\theta))$,

所以 $g\theta h\in M_e$。故 M_e 是 $OT(X,Y;\theta)$ 的子半群。 证毕

2.2 自然偏序的刻画

定理 2 设 $f,g\in M_e$,则 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$ 且 $Xf\subseteq Xg$。

证明 必要性。$\forall f,g\in M_e$,则由引理 2 知 $\theta|_{Xf}$,$\theta|_{Xg}$ 都是单射。设 $f\leqslant g$,则存在 $h,k\in M_e$,使得 $f=h\circ g=g\circ k$,$f=h\circ f$。因为 $f=h\circ g=g\circ k$,所以 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$ 且 $Xf\subseteq Xg$。

充分性。设 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$ 且 $Xf\subseteq Xg$ 成立。需要构造 $h,k\in Me$ 使得 $f=h\circ g=g\circ k$,$f=h\circ f$。首先定义 k,因为 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$,所以 $\forall B_i\in X/\ker(g)$,$\exists A_j\in X/\ker(f)$ 使得 $B_i\subseteq A_j$。因为 $g\in M_e$,所以 $B_ig\theta\in B_i\subseteq A_j$,所以 $\forall A_j\in X/\ker(f)$ 有 $A_j\cap Y\theta\neq\varphi$。

记 $f=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{pmatrix}\in M_e$,所以定义:

$$\forall x\in X,xk=\begin{cases}b_j,x\leqslant\max(Xg\theta\cap A_j),1\leqslant j\leqslant r\\ b_j,x>\max(Xg\theta\cap A_j)\text{且 }A_{j+1}f\notin X_e,1\leqslant j\leqslant r-1\\ b_{j+1},x>\max(Xg\theta\cap A_j)\text{且 }A_{j+1}f\in X_e,1\leqslant j\leqslant r-1\\ b_r,x>\max(Xg\theta\cap A_j)\end{cases}$$

一方面由 k 的定义知 k 是保序的,由 $f=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{pmatrix}$ 及 k 定义知,$k=\begin{pmatrix}A'_1 & A'_2 & \cdots & A'_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{pmatrix}$ 且 $A_i\cap A'_i\neq\varphi$,$i=1,2,\cdots,r$,又因为 $f\in M_e$,由 k 的定义知 $k\in M_e$。又因为 $Xf\subseteq Xg$,所以 $Xk\subseteq Xg=Xk\cup\{Xg-Xk\}$,所以 $\{Xg-Xk\}\theta k\subseteq Xk$,又 $k\in M_e$,所以 $k=k\theta k$。

另一方面 $\forall B_i\in\ker(g)$,则 $\exists A_j\in\ker(f)$,$\ni B_i\subseteq A_j$。因为 $g\in E(OT(X,Y;\theta))$,所以 $Xg\theta\triangleright\ker g$。

当 $B_i=A_j$ 时 $B_ig\theta\in B_i=A_j$,又因为 $A_j\cap A_j'\neq\varphi$,$Xg\theta k=Xk$,所以 $B_ig\theta k=b_i$,即 $b_i(g\theta k)^{-1}=B_i$。

当 $B_i\subset A_j$ 时,则 $\exists B_{i+1},B_{i+2},\cdots,B_{i+t}\in\ker(g)$,$(i+t\leqslant r)$,且 $B_{i+1},B_{i+2},\cdots,B_{i+t}\subset A_j$,$\ni B_i\cup B_{i+1}\cup\cdots\cup B_{i+t}=A_j$。又因为 $Xg\theta\triangleright\ker(g)$,所以 $B_ig\theta\in B_i$,$B_{i+1}g\theta\in B_{i+1}$,$\cdots$,$B_{i+t}g\theta\in B_{i+t}$,$i+t\leqslant r$。所以 $\{B_ig\theta,B_{i+1}g\theta,\cdots,B_{i+t}g\theta\}\subseteq B_i\cup B_{i+1}\cup\cdots\cup B_{i+t}=A_j$。

又因为 $A_j\cap A_j'\neq\varphi$,$Xg\theta k=Xk$,所以 $B_ig\theta k=B_{i+1}g\theta k=\cdots=B_{i+t}g\theta k=b_j$。所以 $b_j(g\theta k)^{-1}=B_i\cup B_{i+1}\cup\cdots\cup B_{i+t}=A_j$,所以 $\ker(g\theta k)=\ker(f)$。即存在 $k\in M_e$ 使得 $f=g\circ k$。

下面构造 $h\in M_e$ 使得 $f=h\circ g$。记 $f=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{pmatrix}\in M_e$,所以定义:$xh=$
$$\begin{cases}x\theta^{-1},x\in\{b_if^{-1}\},b_i\in Xe,\{b_if^{-1}\}=\{b_ig^{-1}\},\{b_if^{-1}\}\subseteq\{Y\theta\}\text{且 }|x\theta^{-1}|=1,x\theta^{-1}\not\subset Xe\text{。}\\ Xf,\text{其他情况}\end{cases}$$

由 h 的定义知 h 是保序的,由 $f\in M_e$ 知 $h\in M_e$,即存在 $h\in M_e$ 使得 $f=h\circ g$。由 h 的定义知 $h\circ g=h\theta g=f$。故设 $f,g\in M_e$,则 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$ 且 $Xf\subseteq Xg$。 证毕

推论 1 设 $f,g\in M_e$,并且 $f\leqslant g$,则下列结论成立:

1) 若 $Xf=Xg$ 则 $f=g$;

2）$\forall A\in X/\ker(f)$，存在 $B\in X/\ker(g)$，使得 $B\subseteq A$ 并且 $f(A)=g(B)$；

3）若 $\ker(f)=\ker(g)$ 则 $f=g$。

证明　1）因为 $f,g\in M_e$，由定理 2 知 $\ker(g)$ 加细 $\ker(f)$，且 $Xf\subseteq Xg$。又因为 $Xf=Xg$ 所以 $f=g$，结论 1)成立。

2）由 $f\leqslant g$ 及定理 2 知 $\ker(g)$加细 $\ker(f)$，所以 $\forall B\in X/\ker(g)\ \exists,A\in X/\ker(f)$使得 $B\subseteq A$。因为 $\ker(f)$，$\ker(g)$都是有限集合 X 的分解，所以 $\forall A\in X/\ker(f)$，$\exists B\in X/\ker(g)$使得 $B\subseteq A$。又因为 $f\leqslant g$，定理 2 知 $Xf\subseteq Xg$，所以 $f(A)=g(B)$。故 $\forall A\in X/\ker(f)$，$\exists B\in X/\ker(g)$使得 $B\subseteq A$ 并且 $f(A)=g(B)$。

结论 3)可由结论 2)直接得到。　　证毕

2.3 极大元、极小元和覆盖元

定义 2　设 $f,g\in M_e$，若 $f<g$，并且不存在 $h\in Me$ 使得 $f<h<g$，则 g 称是 f 的一个上覆盖。对偶地，可以定义下覆盖，下面主要讨论子半群 M_e 中的极大元，极小元和覆盖元。

定理 3　设 $f\in M_e$，$Xf\triangleright\ker(\theta)$，则 f 是极大元。

证明　假设 f 不是极大元，则存在 $g\in M_e$ 使得 $f<g$，由定理 2 知 $Xf\subset Xg$，所以$|Xg|>|Xf|$因为 $g\in M_e$，所以 $\theta|_{Xg}$是单射，所以$|Xg|\leqslant|\ker(\theta)|$，所以$|Xf|<|Xg|\leqslant|\ker(\theta)|$这与 $Xf\triangleright\ker(\theta)$ 矛盾。故假设不成立，所以 f 是极大元。　　证毕

定理 4　设是 $f\in M_e$，f 是极小元$\Leftrightarrow f$ 常值映射。

证明　必要性。如果 f 不是常值映射，则$|Xf|>1$。取 $a\in Xf$，$Xg=\{a\}$，则显然有 $g\in Me$ 并且 $g<f$，这说明 f 不是极小元。

充分性。设 f 是常值映射，即 $Xf=\{a\}$。如果有某个 $g\in Me$ 使得 $g\leqslant f$，由定理 2 知 $Xg\subseteq Xf=\{a\}$进而 $Xf=Xg$。由推论 1 的结论 1)知 $f=g$。　　证毕

定理 5　设 $f\in M_e$，若 f 不是极大元，则 f 存在上覆盖。

证明　设 $f\in M_e$，f 不是极大元，则由定理 3 知，Xf 不是 $\ker(g)$的截面，所以$|Xf|<|\ker(\theta)|$。设 $f=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{pmatrix}\in M_e$，则必存在某个 $A_i\in X/\ker(f)$使得$|A_i\cap Y\theta|\geqslant 2$，(否则 Xf 是 $\ker(\theta)$的截面)取定 $a\in\{x:x\in A_i\cap Y\theta-b_i\theta\}$。

1）若 $b_i\theta=\max\{x:x\in A_i\cap Y\theta\}$，则定义：

$$g=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & B & B_i & A_{i+1} & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}\in M_e,$$

其中 $B=\{x:x\in A_i,x<b_i\theta\}$，$B_i=\{x:x\in A_i,x\geqslant b_i\theta\}$，$b\in a\theta^{-1}$，由 g 的定义及 $f\in M_e$ 知 $g\in M_e$ 且 $\ker(g)$加细 $\ker(f)$，$Xf\subset Xg$，由定理 2 知 $f<g$，即 g 是 f 的一个上覆盖。

2）若 $b_i\theta\neq\max\{x:x\in A_i\cap Y\theta\}$，则定义：

$$g=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & B & B_i & A_{i+1} & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}\in M_e,$$

其中 $B=\{x:x\in A_i,x<b_i\theta\}$，$B_i=\{x:x\in A_i,x\geqslant b_i\theta\}$，$b\in a\theta^{-1}$，由 g 的定义及 $f\in M_e$ 知 $g\in Me$ 且 $\ker(g)$加细 $\ker(f)$，$Xf\subset Xg$，由定理 2 知 $f<g$，即 g 是 f 的一个上覆盖。

综合上可得，设 $f\in M_e$，若 f 是不极大元，则 f 存在上覆盖。　　证毕

定理 6　设 $f\in M_e$，若 f 不是极小元，则 f 存在下覆盖。

证明　设 $f\in M_e$，若 f 不是极小元，由定理 4 知 Xf 不是常值映射，则$|Xf|\geqslant 2$。取 $a\in Xf$，$Xg=\{a\}$，由 $f\in M_e$ 显然有 $g\in M_e$，并且 $g<f$，即 g 是 f 的一个下覆盖。故 f 存在下覆盖。　　证毕

参考文献:

[1] Hartwig R E. How to partially order regular elements[J]. Mathematica Japonicae,1980,25(1):1-13.

[2] Nambooripad K S. The natural partial order on a regular semigroup[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,1980,23(2):249-260.

[3] Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1986,97(3):384-388.

[4] Kowol G, Mirsch H. Naturally Ordered Transformation Semigroups[J]. Monatshefte fur Mathematik,1986,102(2):115-138.

[5] 裴慧生,邓伟娜.保持序和等价关系的自然偏序变换半群[J].数学学报:中文版,2012,55(2):235-250.
Pei H S, Deng W N. Naturally Ordered Transformation Semigroups Preserving Order and an Equivalence Relation[J]. Acta Mathematica Sinica:Chinese Series,2012,55(2):235-250.

[6] 莫贵圈,李艳琴.$OT(X,Y;\theta)$的正则元、幂等元的一些特殊性质[J].贵州师范学院学报:自然科学版,2012,28(12):10-12.
Mo G Q, Li Y Q. Regulations and idempotents properties for finite ordered-preserving sandwich semigroup $OT(X,Y;\theta)$[J]. Journal of Guizhou Normal College:Natural Science,2012,28(12):10-12.

[7] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory[M]. London:Academic Press,1976.

[8] Howie J M. Fundamentals of Semigroup Theory[M]. USA:Oxford University Press,1996.

A Sub-semigroup M_e of $OT(X,Y;\theta)$ and Its Maximal (Minimal) Elements

MO Guiquan

(College of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal College, Guiyang 550018, China)

Abstract: In this paper, we discuss a subset of the finite preserving order sandwich semigroup's idempotent set. Because the idempotent $E(OT(X,Y;\theta))$of the semigroup $OT(X,Y;\theta)$ does not constitute a subsemigroup, with some limitations, the subset M_e of idempotent set is a sub-semigroup, under natural order of finite order preserving sandwich semigroup $OT(X,Y;\theta)$ of sub-semigroup M_e. At the same time, the maximal (minimal) elements and the covering elements of the sub semigroup M_e are described.

Key words: sub-semigroup M_e; natural order; the maximal elements; the minimal elements; the covering elements

(责任编辑 许 甲)