DOI:10.11721/cqnuj20160225

M-矩阵最小特征值的下界新估计*

孙 德 淑

(贵州民族大学 理学院,贵阳 550025)

摘要:对于非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 M-矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵的 Hadamard 积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$,利用 optimally scaled 矩阵,Jacobi 迭代矩阵和矩阵特征值与特征向量的关系,给出 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ 的谱半径上界新的估计式。同时,利用相同的方法得到 M-矩阵 $\boldsymbol{B}$ 最小特征值的新下界估计式。最后通过算例表明所得的估计式在一定条件下优于现有的估计式,且这些估计式都只依赖于矩阵的元素,易于计算。

关键词:M-矩阵;非负矩阵;Hadamard 积;谱半径;最小特征值

中图分类号:O151.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2016)02-0085-05

M-矩阵不仅是矩阵论研究的重要矩阵类,而且在经济学、统计学、工程数学等诸多领域中有着重要的实用。尤其近年来,许多学者对 M-矩阵最小特征值的界进行了深入研究,给出了一系列好的估计式[1-5]。本文继续对 M-矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{B})$ 的下界进行研究,给出一些新的估计式,在一定条件下新的估计式比现有结果[1-3]更加精确。

1 符号与引理

用 $\mathbf{R}^{n\times n}$($\mathbf{C}^{n\times n}$)表示全体 n 阶实(复)矩阵的集合,$\mathbf{N}$ 表示全体正整数的集合,$\boldsymbol{A}>\mathbf{0}$($\boldsymbol{A}\geqslant\mathbf{0}$)表示 $\boldsymbol{A}$ 为正(非负)矩阵,$\rho(\boldsymbol{A})$表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径,$\sigma(\boldsymbol{A})$表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若 $a_{ij}\leqslant 0, i\neq j$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z-矩阵,记 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Z}_n$。设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Z}_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{B}\geqslant\mathbf{0}$,若 $s>\rho(\boldsymbol{B})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵,记 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$。设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Z}_n$,记 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$,称 $\tau(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,用 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相乘而成的矩阵,即 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,称 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,如果存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 分别是阶数大于等于 1 的方阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约的,否则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\geqslant\mathbf{0}$ 为非负矩阵,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{ii})$。记 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}$,$\mathcal{J}_A=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(d_{ii})$,其中 $d_{ii}=\begin{cases}1, a_{ii}=0\\ a_{ii}, a_{ii}\neq 0\end{cases}$。由$\mathcal{J}_A$的定义知:

$$\rho(\mathcal{J}_A^{\mathrm{T}})=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})=\rho(\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_1^{-1})=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_1^{-1})\boldsymbol{D}_1)=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{G})=\rho(\mathcal{J}_A)。$$

为讨论方便,引进下述记号:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $i,j,k\in\mathbf{N}$, $i\neq j$, $R_i=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,$d_i=\dfrac{R_i}{|a_{ii}|}$,$s_{ji}=\dfrac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}$,$m_{ji}=\dfrac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|s_{ki}}{|a_{jj}|}$,$m_i=\max\limits_{j\neq i}\{m_{ij}\}$。

* 收稿日期:2015-05-16 修回日期:2015-12-21 网络出版时间:2016-1-20 21:25

资助项目:国家自然科学基金(No. 11361074;No. 71161020);贵州省科技厅联合基金(No.[2015]7206);贵州省教育厅自然科学基金(No.[2015]420);贵州民族大学引进人才科研基金(No. 15XRY004)

作者简介:孙德淑,女,助教,研究方向为数值代数,E-mail:sundeshu0818@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2125.014.html

引理 1[6] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于复平面的下列区域之中 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}|\leqslant x_i\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{1}{x_k}|a_{ki}|\right\}$。

引理 2[7] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于复平面的下列区域之中 $\bigcup\limits_{i\neq j}\left\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\left(x_i\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{1}{x_k}|a_{ki}|\right)\left(x_j\sum\limits_{k\neq j}\dfrac{1}{x_k}|a_{kj}|\right)\right\}$。

引理 3[7] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对角矩阵,则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE})。$$

引理 4[7] 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$,则存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX}$ 是严格对角占优的 M-矩阵。

引理 5[8] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优的 M-矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足 $\alpha_{ji}\leqslant m_{ji}\alpha_{ii},j,i\in\mathbf{N},j\neq i$。

2 主要结论

1996 年,Shivakumar 等人[1]给出如下结果:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵,则

$$r(\boldsymbol{A})\leqslant\tau(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}),\tau(\boldsymbol{A})\leqslant\min_{i\in\mathbf{N}}a_{ii},\frac{1}{\boldsymbol{M}}\leqslant\tau(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{1}{\boldsymbol{m}}。\tag{1}$$

2010 年,田贵贤等人[2]给出了 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界新估计:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 M-矩阵,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{1+(n-1)\rho(\boldsymbol{J_A})}\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\alpha_{ii}\}},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{J_A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的雅可比迭代矩阵。

2013 年,李朝迁等人[3]给出了优于(2)式的估计式:设 $\boldsymbol{B}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 M-矩阵,且 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant\frac{2}{\max\limits_{i\neq j}\{\beta_{ii}+\beta_{jj}+[(\beta_{ii}-\beta_{jj})^2+4(n-1)^2\rho^2(\boldsymbol{J_B})\beta_{ii}\beta_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}},\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{J_B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的雅可比迭代矩阵。

下面给出 M-矩阵的最小特征值新的下界估计式。首先给出 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})$ 的上界估计。

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\geqslant0,\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n,\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{(a_{ii}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii})\beta_{ii}\}。\tag{4}$$

证明 若 $n=1$,则(4)式成立。下面,假定 $n\geqslant2$。

因 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n$,故由引理 3 及引理 4 知存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{BX}$ 是严格对角占优的 M-矩阵,且 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})=\rho(\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X})=\rho(\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{BX})^{-1})$。所以为了讨论方便,现假定 $\boldsymbol{B}$ 是严格对角占优的 M-矩阵。下面分两种情形讨论。

1) 假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为不可约阵。由 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的非负矩阵知 $\mathcal{J}_A^{\mathrm{T}}$ 也是不可约的非负矩阵,故存在一个正向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $\mathcal{J}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\rho(\mathcal{J}_A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}=\rho(\mathcal{J}_A)\boldsymbol{u}$,则有 $\sum\limits_{j\neq i}a_{ji}u_j=\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}u_i$。

令 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})=\boldsymbol{UAU}^{-1}$,则有 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&\dfrac{u_1}{u_2}a_{12}&\cdots&\dfrac{u_1}{u_n}a_{1n}\\\dfrac{u_2}{u_1}a_{21}&a_{22}&\cdots&\dfrac{u_2}{u_n}a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\dfrac{u_n}{u_1}a_{n1}&\dfrac{u_n}{u_2}a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$。由引理 3 知 $\overline{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{UAU}^{-1})\circ\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{U}^{-1}$,故 $\overline{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ 有相同的特征值。设 $\rho(\overline{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1})=\lambda$,则 $\lambda\geqslant a_{ii}\beta_{ii}$ $(\forall i\in\mathbf{N})$。由引理 1 知一定存在 $i_0\in\mathbf{N}$,使得

$$|\lambda-a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}|\leqslant m_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{m_j}\overline{a}_{ji_0}\beta_{ji_0}\leqslant m_{i_0}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\omega_j}\overline{a}_{ji_0}\cdot m_{ji_0}\beta_{i_0i_0}\leqslant$$

$$m_{i_0}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\omega_j}\bar{a}_{ji_0}\cdot m_j\beta_{i_0i_0}=m_{i_0}\sum_{j\neq i}\bar{a}_{ji_0}\beta_{i_0i_0}=m_{i_0}\sum_{j\neq i}\frac{u_j}{u_{i_0}}a_{ji_0}=m_{i_0}\rho(\mathcal{J}_A)d_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0},$$

即 $\lambda\leqslant a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}+m_{i_0}\rho(\boldsymbol{\eta}_A)d_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}$，从而 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(a_{ii}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii})\beta_{ii}\}$。

2) 假定 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 至少一个是可约的。令 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 是 n 阶置换阵，其中 $p_{12}=p_{23}=\cdots=p_{n-1,n}=p_{n1}=-1$，其余 p_{ij} 为零，则对任意正数 ε，$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{P}$ 是不可约的非负矩阵，$\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{P}$ 是不可约的 M-矩阵。用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{P}$ 分别代替情形 1)中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，类似于情形 1)的讨论，并令 $\varepsilon\to0$，利用连续性可得结论成立。　证毕

利用定理 1，得到如下定理。

定理 2　设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$，$\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$，则

$$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(1+m_i(n-1))\beta_{ii}\}}。\tag{5}$$

证明　由定理 1 知 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(a_{ii}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii})\beta_{ii}\}$。令 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1，则 $a_{ii}=d_{ii}=1(\forall i\in\mathbf{N})$，$\rho(\mathcal{J}_A)=n-1$。于是 $\tau(\boldsymbol{B})=\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\geqslant\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(1+m_i(n-1))\beta_{ii}\}}$，即证得(5)式成立。　证毕

定理 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\geqslant0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n$，$\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\frac{1}{2}\max_{i\neq j}\{a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}+[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\},\tag{6}$$

其中 $\Delta_{ij}=m_im_j\rho^2(\mathcal{J}_A)d_{ii}d_{jj}\beta_{ii}\beta_{jj}$，$i,j\in\mathbf{N}$，$i\neq j$。

证明　若 $n=1$，则(6)式成立。下面，假定 $n\geqslant2$。

因 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n$，故由引理 3 及引理 4 知存在正对角矩阵 $\boldsymbol{Y}$，使得 $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{BY}$ 是严格对角占优的 M-矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})=\rho(\boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{Y})=\rho(\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{BY})^{-1})$。所以，为了讨论方便，现假定 $\boldsymbol{B}$ 是严格对角占优的 M-矩阵。下面，分两种情形讨论。

1) 假定 A，B 均为不可约阵。由于 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的非负矩阵，则 $\mathcal{J}_A{}^{\mathrm{T}}$ 也是不可约的非负矩阵，故存在一个正向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $\boldsymbol{J}_{A^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{v}=\rho(\boldsymbol{J}_{A^{\mathrm{T}}})\boldsymbol{v}=\rho(\boldsymbol{J}_A)\boldsymbol{v}$，则有 $\sum\limits_{k\neq i}a_{ki}v_k=\rho(\boldsymbol{J}_A)d_{ii}v_i$，$\sum\limits_{k\neq j}a_{kj}v_k=\rho(\boldsymbol{J}_A)d_{jj}v_j$。

令 $\boldsymbol{V}=\operatorname{diag}(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，$\hat{\boldsymbol{A}}=(\hat{a}_{ij})=\boldsymbol{VAV}^{-1}$，则有 $\hat{\boldsymbol{A}}=(\hat{a}_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&\frac{v_1}{v_2}a_{12}&\cdots&\frac{v_1}{v_n}a_{1n}\\\frac{v_2}{v_1}a_{21}&a_{22}&\cdots&\frac{v_2}{v_n}a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{v_n}{v_1}a_{n1}&\frac{v_n}{v_2}a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$。由引理 3 知 $\hat{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{VAV}^{-1})\circ\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{V}^{-1}$，故 $\hat{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ 有相同的特征值。设 $\rho(\hat{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}^{-1})=\lambda$，则 $\lambda\geqslant a_{ii}\beta_{ii}$ $(\forall i\in\mathbf{N})$。由引理 2 知一定存在 $j_0,i_0\in\mathbf{N}$，$j_0\neq i_0$，使得

$$|\lambda-a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}||\lambda-a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}|\leqslant\left(m_{i_0}\sum_{k\neq i_0}\frac{1}{m_k}|\hat{a}_{ki_0}\beta_{ki_0}|\right)\left(m_{j_0}\sum_{k\neq j_0}\frac{1}{m_k}|\hat{a}_{kj_0}\beta_{kj_0}|\right)。$$

再由引理 5 知 $\left(m_{i_0}\sum\limits_{k\neq i_0}\frac{1}{m_k}|a_{ki_0}\beta_{ki_0}|\right)\left(m_{j_0}\sum\limits_{k\neq j_0}\frac{1}{m_k}|a_{kj_0}\beta_{kj_0}|\right)\leqslant\Delta_{i_0j_0}$，于是 $|\lambda-a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}||\lambda-a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}|\leqslant\Delta_{i_0j_0}$。进而可得 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}\{a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}+a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}+[(a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}-a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0})^2+4\Delta_{i_0j_0}]^{\frac{1}{2}}\}$，即

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\frac{1}{2}\{a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}+a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}+[(a_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}-a_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0})^2+4\Delta_{i_0j_0}]^{\frac{1}{2}}\}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\max_{i\neq j}\{a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}+[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\}。$$

2) 假定 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 至少一个是可约的。令 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 是 n 阶置换阵，其中 $p_{12}=p_{23}=\cdots=p_{n-1,n}=p_{n1}=-1$，其余 p_{ij} 为零。则对任意正数 ε，$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{P}$ 是不可约的非负矩阵，$\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{P}$ 是不可约的 M-矩阵。用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{P}$ 分别代替情形 1)中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，类似于情形 1)的讨论，并令 $\varepsilon\to0$，利用连续性可得结论成立。　证毕

利用定理3得到如下定理。

定理4 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in \boldsymbol{M}_n$，$\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$，则

$$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant\frac{2}{\max\limits_{i\neq j}\{\beta_{ii}+\beta_{jj}+[(\beta_{ii}-\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\}},\tag{7}$$

其中 $\Delta_{ij}=m_im_j(n-1)^2\beta_{ii}\beta_{jj}$，$i,j\in\mathbf{N}$，$i\neq j$。

证明 由定理3知 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\frac{1}{2}\max\limits_{i\neq j}\{a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}+[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\}$。令 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为1，则 $a_{ii}=d_{ii}=1(\forall i\in\mathbf{N})$，$\rho(\mathcal{J}_A)=n-1$。于是

$$\tau(\boldsymbol{B})=\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\geqslant\frac{2}{\max\limits_{i\neq j}\{\beta_{ii}+\beta_{jj}+[(\beta_{ii}-\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\}},$$

其中 $\Delta_{ij}=m_im_j(n-1)^2\beta_{ii}\beta_{jj}(i,j\in\mathbf{N},i\neq j)$。(7)式得证。 证毕

注 下面分别对(4)式与(6)式，(5)式与(7)式进行比较。

不失一般性，当 $i\neq j$ 时，假设 $a_{jj}\beta_{jj}+m_j\rho(\mathcal{J}_A)d_{jj}\beta_{jj}\leqslant a_{ii}\beta_{ii}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii}$，即

$$m_j\rho(\mathcal{J}_A)d_{jj}\beta_{jj}\leqslant a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii}。$$

因此，

$$[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}=[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4m_im_j\rho^2(\mathcal{J}_A)\mathrm{d_{ii}d_{jj}}\beta_{ii}\beta_{jj}]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$[(\mathrm{a_{ii}}\beta_{ii}-\mathrm{a_{jj}}\beta_{jj})^2+4\mathrm{m_i}\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii}(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii})]^{\frac{1}{2}}=a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj}+2m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii}。$$

于是 $a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}+[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\leqslant 2a_{ii}\beta_{ii}+2m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii}\beta_{ii}$，即

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\leqslant\frac{1}{2}\max_{i\neq j}\{a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}+[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2+4\Delta_{ij}]^{\frac{1}{2}}\}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{(a_{ii}+m_i\rho(\mathcal{J}_A)d_{ii})\beta_{ii}\}。$$

故(6)式优于(4)式。

同理可证得(7)式优于(5)式。

3 数值例子

例1 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1.2&-0.4&-0.4\\-0.3&1&-0.5\\-0.3&-0.4&0.8\end{pmatrix}$。易知 $\boldsymbol{B}$ 是M-矩阵。借助Matlab 7.1，计算得 $\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.100\,000\,00$(利用(1)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.142\,539\,82$(利用(2)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.160\,815\,71$(利用(3)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.149\,659\,86$(利用(5)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.172\,323\,76$(利用(7)式)。可见(7)式优于(1)～(3)、(5)式。实际上 $\tau(\boldsymbol{B})=0.202\,790\,74$。

例2 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-0.2&-0.1&-0.3&-0.1\\-0.4&1.2&-0.2&-0.1&-0.1\\-0.3&-0.2&1.3&-0.1&-0.2\\-0.2&-0.3&-0.3&1&-0.1\\-0.1&-0.3&-0.2&-0.2&1.1\end{pmatrix}$。易知 $\boldsymbol{B}$ 是M-矩阵。借助Matlab 7.1计算得 $\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.100\,000\,00$(利用(1)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.175\,097\,89$(利用(2)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.179\,157\,34$(利用(3)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.205\,316\,48$(利用(5)式)，$\tau(\boldsymbol{B})\geqslant 0.223\,014\,41$(利用(7)式)。可见(5)，(7)式优于(1)～(3)式。实际上，$\tau(\boldsymbol{B})=0.311\,384\,41$。

4 结语

文中给出了M-矩阵最小特征值的新下界估计式。通过数值算例验证了本文的结果在一定条件下优于文[1-3]中的结果。

参考文献:

[1] Shivakumar P N, Williams J J, Ye Q, et al. On two-sided bounds related to weakly diagonally dominant M-matrices with application to digital circuit dynamics[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1996, 17: 298-312.

[2] Tian G X, Huang T Z. Inequalities for the minimum eigenvalue of M-matrices[J]. Electron J Linear Algebra, 2010, 20: 291-302.

[3] Li C Q, Li Y T, Zhao R J. New inequalities for the minimum eigenvalue of M-matrices[J]. Linear Multilinear A, 2013, 61(9): 1267-1279.

[4] Xu M, Li S H, Li C Q. Inequalities for the minimum eigenvalue of doubly strictly diagonally dominant M-matrices [J]. J Appl Mathe, 2014, 2014: 1-8.

[5] 刘新,杨晓英. M-矩阵 Hadamard 积最小特征值的新下界[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(2):53-55.
Liu X, Yang X Y. New lower bounds for the minimum eigenvalues of Hadamard product in M-matrices[J]. J Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(2): 53-55.

[6] Varga R S. Gerscgorin and his circles[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[7] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[8] Chen F B. New inequalities for the Hadamard product of an M-matrix and its inverse[J]. J Inequal Appl, 2015, 35: 1-12.

New Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of M-matrix

SUN Deshu

(College of Science, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

Abstract: For the Hadamard product $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ of a nonnegative matrix $\boldsymbol{A}$ and an M-matrix $\boldsymbol{B}$, some new upper bounds for the spectral radius of $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ are obtained by using optimally scaled matrix, Jacobi iterative matrix and the relationship between matrix eigenvalue and eigenvector. Meanwhile, some new lower bounds for the minimum eigenvalue of an M-matrix $\boldsymbol{B}$ are given. Numerical examples show that these estimating formulas improve the related results in some cases, and the bounds only depend on the entries of matrices, therefore, they are easy to calculate.

Key words: M-matrix; nonnegative matrix; Hadamard product; spectral radius; minimum eigenvalue

(责任编辑 黄 颖)