DOI:10.11721/cqnuj20160222

一类 Burgers-Constantin-Lax-Majda 方程的奇异性*

李林锐[1]，王　术[2]，王长有[3]

(1. 防灾科技学院 基础部，河北 三河 065201；2. 北京工业大学 应用数理学院，北京 100124；
3. 重庆邮电大学 应用数学研究所，重庆 400065)

摘要：研究了一类广义的 Burgers-Constantin-Lax-Majda 方程的奇异性问题，这类方程同时具有 Burgers 方程和 Constantin-Lax-Majda 方程的许多性质，同时带有非局部项 uHu(其中 H 表示 Hilbert 变换)，证明了这类方程在非负的初始条件下，其解在有限时间内是爆破的，这些结果在很大程度上推广和延伸了先前的相关结果。

关键词：Burgers-Constantin-Lax-Majda 方程；有限时间奇异性；Hilbert 变换；非线性非局部系统

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)02-0090-05

本文将研究一类广义 Burgers-Constantin-Lax-Majda 方程的奇异性：

$$\begin{cases}\partial_t u+uu_x=uHu, x\in\mathbf{R},\ t>0,\\ u|_{t=0}=u_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 H 表示 Hilbert 变换，其定义如下

$$Hf(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.\,V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y,\tag{2}$$

如果是在周期性区域，则定义为

$$Hf(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.\,V.}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x-y)}{\tan\dfrac{y}{2}}\mathrm{d}y,\tag{3}$$

一个函数的 Hilbert 变换之后的 Fourier 变换定义为 $\widehat{Hu}(\xi)=-i\mathrm{sign}(\xi)\hat{u}(\xi)$。接下来引入符号 Λ 表示分数阶的 Laplace 算子，记 $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\equiv\Lambda^\beta$。分数阶的 Laplace 算子定义为

$$\Lambda^\beta u(x)=k_\beta\int_{\mathbf{R}}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{1+\beta}}\mathrm{d}y,$$

其中 $k_\beta=\dfrac{\Gamma(1+\beta)\cos\left((1-\beta)\dfrac{\pi}{2}\right)}{\pi}$。

这个系统由于具有非局部非线性项，不同于先前的仅仅带有一般拉普拉斯类型的粘性项 $\nu\Delta u$ 的耗散系统，如果比较一下方程 (1) 和参考文献中所研究的方程，会发现这些方程有一些相似点但是所表示的物理意义非常不同。能够描述激波形成的最简单的方程就是 Burger's 方程，另外一个非常值得提出的模型是 Constantin，Lax 和 Majda[1] 在 1985 年提出的如下模型：

$$\begin{cases}\omega_t=\omega H\omega,\\ \omega(x,0)=\omega_0(x)。\end{cases}\tag{4}$$

这个模型常常作为研究流体动力学方程中尤其是在三维情形下对应方程旋度方程的一个简化的模型，经常被称为 Constantin-Lax-Majda 方程(简称为 CLM 方程)。其中的二次项 $\omega H\omega$ 是一个标量，其作用类似于旋度方程中的涡流拉伸项 $D(\omega)\omega$。事实上，这个方程的解也是具有有限时间奇异性的。紧随其后，De Gregorio[2,3] 分别在 1990 年和 1996 年研究了下面的方程，这个方程是三维不可压缩的无粘性旋度方程的一种新的简化形式，方程如下：

* **收稿日期**：2014-12-15　　**修回日期**：2015-11-22　　**网络出版时间**：2016-1-20　21:25

资助项目：国家自然科学基金(No. 11371042)；青年科学基金资助项目(No. 201207)

作者简介：李林锐，女，讲师，博士，研究方向为偏微分方程及其应用，E-mail:linrui020213@163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2125.020.html

$$\begin{cases}\omega_t+\nu\omega_x-\nu_x\omega=0,\\ \nu_x=H\omega,\\ \omega(x,0)=\omega_0(x)。\end{cases}\tag{5}$$

他所提出的方程虽然仅仅是对流项 $\nu\omega_x$ 不同于先前的 CLM 方程。然而他给出了一些证据显示了这个方程的解竟然没有出现爆破!但是给出的证据仅仅是一些数学模拟实验,并没有给出严格的数学证明。然而他的结果在某种程度上说明了改造之后的对流项在阻止方程解的爆破方面所起到的作用。随后,H. Okamoto 等人[4]提出了广义的 CLM 方程,广义的 CLM 方程同时具有 CLM 方程(4)和 De Gregorio's 方程(5)的共同特性

$$\begin{cases}\omega_t+a\nu\omega_x-\nu_x\omega=0,\\ \nu_x=H\omega,\\ \omega(x,0)=\omega_0(x),\end{cases}$$

其中 a 是实数。如果 $a=0$,很显然该方程变成了通常意义下的 CLM 方程(4)。如果 $a=1$,则该方程变成了 De Gregorio's 方程(6)。如果 $a=-1$,则该方程变成了 A. Cordoba 等人[5-6]分别在 2005 年和 2006 年所研究的方程:

$$\theta_t+\theta_x H\theta=0,\tag{6}$$

这个方程的解具有许多形式的爆破解。如果在对方程(6)两边同时关于 x 求导数然后取 $\omega=-\theta_x$,则 ω 满足广义的 De Gregorio's 方程(其中 $a=-1$)。以上这些结果也显示了广义的 CLM 方程的解在 $-1\leqslant a<1$ 时解是爆破的;当 $-\infty<a<-1$ 或者 $1\leqslant a<\infty$ 时其解是整体存在的;当 $a\to\infty$ 其解也是整体存在的。在 2003,T. Sakajo 等人[7]研究了带有广义粘性项的 CLM 方程

$$\begin{cases}\omega_t=\omega H\omega-\nu(-\Delta)\dfrac{\alpha}{2}\omega,x\in\mathbf{R},t>0,\\ \omega(x,0)=\omega_0(x),\end{cases}\tag{7}$$

并且利用谱方法给出了显示解,证明了对于旋度方程的光滑解也是在有限时间内是爆破的。2008 年,A. Kiselev 等人[8]研究了带有分数阶耗散项的 Burger's 方程 $\partial_t u+uu_x=(-\Delta)^{\beta}u\,(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 解在不同情形下的奇异性和正则性。在 2010 年,A. Castro 等人[9]研究了表面波方程

$$\begin{cases}u_t+uu_x=\Lambda^{\beta}Hu,0\leqslant\beta<1,\\ u(x,0)=u_0(x),\end{cases}\tag{8}$$

他们证明了方程(8)在 $0\leqslant\beta<1$ 时其解在有限时间内是爆破的。随后,在 2012 年,V M. Hur [10]研究了广义表面波方程 $\partial_t u-2u\partial_x u+H^j\Lambda^{\gamma}u=0$,其中 $j=0$ 或者 $j=1$ 且 $\gamma\in(0,1)$,这个方程描述了海洋里面形成波浪和水泡时的波面的情况,他们利用几乎类似的方法证明了其解在有限时间内是爆破的,这些结果同先前的实验结果是高度一致的,从而从理论上给出了严格的证明。在方程(8)中当 $\beta=0$ 时,J K. Hunter 和 M. Ifrim[11]考虑了具有二次非线性无粘性的 Burgers-Hilber 方程 $u_t+\varepsilon uu_x=Hu$,用这个方程模拟旋度方程的不连续性。他们利用了规范形变换和近似恒等变换从而改变了空间变量的独立性,证明了解的局部存在性和光滑解的立方非线性的时间尺度。此外,他们的结果也显示了 Burgers-Hilbert 方程的光滑解具有 $O(\varepsilon^{-2})$ 阶的时间尺度,而无粘性的 Burgers 方程 $u_t+\varepsilon uu_x=0$ 的解具有 $O(\varepsilon^{-1})$ 阶的时间尺度,这类方程可以作为描述许多物理现象的数学模型,例如交通流、激波、扰流问题和连续的随机过程等。而在本文中 Burgers-Constaitin-Lax-Majda 模型是一个新的模型,这个模型不是常规意义下带有拉普拉斯类型粘性项的耗散型方程,并且方程中用一个带有 Hilbert 算子的非局部算子代替了常规的粘性项,更具有广泛的意义,这个模型为研究相关流体动力学方程的解的奇异性提供了一个参考模型,也为研究非线性非局部项的相互作用提供了一个好的例子。

1 主要结果

定理 1　令 $u_0\in L^1(\mathbf{R})\cap C^{1+\delta}$,$0<\delta<1$ 且 $u_0\geqslant0$,如果 $\|u_0\|_{L^1}\geqslant C$,其中 C 是常数,并且满足如下条件:存在 $\alpha_0\in\mathbf{R}$ 使得

$$Hu_0(\alpha_0)>0,\tag{9}$$

则存在时间 T 使得方程(1)的解在有限时间内是爆破的。

对于表面波方程

$$u_t+uu_x=\Lambda^{\beta}Hu,0<\beta<2,\tag{10}$$

利用 Hilbert 变换的正交性,可以得到次方程 L^2 范数的能量守恒,即

$$\| u(\cdot ,t)\|_{L^2(\mathbf{R})}=\| u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}。$$

对于分数阶的 Burgers 方程

$$u_t+uu_x=\Lambda^{\beta}u,0<\beta<2, \tag{11}$$

该方程具有 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 范数的守恒律。

对于 Burgers-CLM 方程,有对应的能量守恒定律

$$\int_{\mathbf{R}}u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}u_0(x)\mathrm{d}x, \tag{12}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u\|_{L^1}+\int_{\mathbf{R}}\frac{u^2}{2}\cdot\nabla 1\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}uHu\mathrm{d}x=0, \tag{13}$$

且 $\widehat{Hu}(\xi)=-i\mathrm{sign}(\xi)\hat{u}(\xi)$,从而

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}}v(x)Hu(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}\hat{v}(\xi)\widehat{Hu}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbf{R}}\hat{v}(\xi)i\mathrm{sign}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}\mathrm{d}x=\\&-\int_{\mathbf{R}}\widehat{Hv}(\xi)\overline{v(\xi)}\mathrm{d}\xi=-\int_{\mathbf{R}}Hv(x)u(x)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{14}$$

如果在(14)式中取 $v=u$,则有 $\int_{\mathbf{R}}u(x)Hu(x)\mathrm{d}x=0$。将其代入(13)式,则 $\| u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbf{R})}=\| u_0\|_{L^1(\mathbf{R})}$。

2 定理的证明

首先给出一些关于 Hilbert 变换的一些等式:

$$H(Hf)=-f,$$

$$H(fHg+gHf)=(Hf)(Hg)-fg,$$

$$H(fg)=Hf\cdot g+fHg+H(HfHg),$$

$$(Hf)_x=H(f_x)。$$

如果在系统(1)中的第一个方程中两边同时作用 Hilbert 算子,可得

$$Hu_t+H(uu_x)=\frac{1}{2}[(Hu)^2-u^2], \tag{15}$$

下面给出一个关于非局部项 $2u(x)\Lambda u(x)-\Lambda(u^2(x))$ 的一个引理,关于该定理的更一般形式可以参考文献[1]。

引理 1 如果函数 $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 Schwartz 函数类,则

$$2u(x)\Lambda u(x)-\Lambda(u^2(x))\geqslant\frac{|u|^3}{C\| u\|_{L^1}}, \tag{16}$$

其中 $C=8\pi$。

证明 由于

$$\Lambda u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y,$$

从而

$$2u(x)\Lambda u(x)-\Lambda(u^2(x))=2u(x)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbf{R}}\frac{u^2(x)-u^2(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y, \tag{17}$$

$$2u(x)\Lambda u(x)-\Lambda(u^2(x))=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^2}\mathrm{d}y。 \tag{18}$$

下面仅仅考虑 $u(x)>0$ 情形。由于 $u(x)<0$ 情形可以类似而得到。令 Ω,Ω^1 和 Ω^2 是如下集合:

$$\Omega=\{y\in\mathbf{R}\mid |y-x|<\Delta\},$$

$$\Omega^1=\left\{y\in\Omega\mid |u(x)-u(y)|\geqslant\frac{u(x)}{2}\right\},$$

$$\Omega^2=\left\{y\in\Omega\mid |u(x)-u(y)|<\frac{u(x)}{2}\right\},$$

由于

$$2u(x)\Lambda u(x)-\Lambda(u^2(x))=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^2}\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{\pi}\frac{u^2(x)}{4\Delta^2}|\Omega^1|, \tag{19}$$

另一方面,

$$\| u(x) \|_{L^1(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} |u(y)| \mathrm{d}y \geqslant \frac{u(x)}{2} |\Omega^2|, \tag{20}$$

从而

$$2u(x)\Lambda u(x) - \Lambda(u^2(x)) \geqslant \frac{1}{\pi}\frac{u^2(x)}{4\Delta^2}|\Omega^1| \geqslant \frac{1}{\pi}\frac{u^2(x)}{4\Delta^2}(|\Omega| - |\Omega^2|) \geqslant \frac{1}{\pi}\frac{u^2(x)}{4\Delta^2}\left(C\Delta - \frac{2\ \| u(x) \|_{L^1(\mathbf{R})}}{u(x)}\right), \tag{21}$$

其中 $C = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = 2$。令 $\Delta = \frac{4\ \| u(x) \|_{L^1(\mathbf{R})}}{2u(x)}$,从而该引理得到证明。　证毕

定理 1 的证明　假设方程(1)在 $T < \infty$ 时存在解 $u(x,t) \in C([0,T], C^{1+\delta}(\mathbf{R}))$,且 u_0 满足定理中的假设条件。

首先,定义关于速度 u 的如下轨道函数 $x(\alpha,t)$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(\alpha,t)}{\mathrm{d}t} = u(x(\alpha,t),t), \\ x(\alpha,t)|_{t=0} = \alpha, \end{cases}$$

考虑方程的解 u 是沿着轨道运动,根据流体的轨道运动可知

$$\frac{\mathrm{d}x(\alpha,t)}{\mathrm{d}t} = \partial_t u(x(\alpha,t),t) + \partial_x u(x(\alpha,t),t)u(x(\alpha,t),t) = u(x(\alpha,t),t)(Hu)(x(\alpha,t),t), \tag{22}$$

从而有

$$\log u(x(\alpha,t),t) = \log u(x(\alpha,t),t)|_{t=0} + \int_0^t (Hu)(x(\alpha,s),s)\mathrm{d}s, \tag{23}$$

解出上面方程的解可得 $u(x(\alpha,t),t) = u_0(\alpha)\mathrm{e}^{\int_0^t (Hu)(x(\alpha,s),s)\mathrm{d}s}$,如果 $u_0 \geqslant 0$,则有 $u \geqslant 0$。

此外,按照 (22)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}\log u(x(\alpha,t))}{\mathrm{d}t} = \frac{u(x(\alpha,t))}{u(x(\alpha,t))}(Hu)(x(\alpha,t),t) = (Hu)(x(\alpha,t),t), \tag{24}$$

在(24)式两边同时关于时间 t 取一次导数可得:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\log u(x(\alpha,t))}{\mathrm{d}t^2} &= \partial_t(Hu)(x(\alpha,t),t) + \partial_x(Hu)(x(\alpha,t),t)u(x(\alpha,t),t) = \\ &(\partial_t(Hu))(x(\alpha,t),t) + u(x(\alpha,t),t)(\partial_x(Hu))(x(\alpha,t),t) = \\ &H(uHu)(x(\alpha,t),t) - H(uu_x)(x(\alpha,t),t) + u(x(\alpha,t),t)(\Lambda u)(x(\alpha,t),t) = \\ &H(uHu)(x(\alpha,t),t) - \frac{1}{2}(\Lambda(u^2))(x(\alpha,t),t) + u(x(\alpha,t),t)\Lambda u(x(\alpha,t),t) \geqslant \\ &H(uHu)(x(\alpha,t),t) + \frac{1}{2}(2u(x(\alpha,t),t)\Lambda u(x(\alpha,t),t) - \Lambda(u^2)(x(\alpha,t),t) \geqslant \\ &H(uHu)(x(\alpha,t),t) + \frac{1}{2}\frac{(|u(x(\alpha,t),t)|^3)}{8\pi\ \| u \|_{L^1}}, \end{aligned} \tag{25}$$

其中在上面证明的最后一步用到引理 1,并且用到等式

$$H(uu_x)(x) = \frac{1}{2}H((u^2)_x) = \frac{1}{2}\Lambda(u^2)(x), \text{和 } \Lambda H(Hu) = -(Hu)_x = -Hu_x,$$

根据 $\Lambda Hu = -u_x$ 和 Hilbert 变换 $H(Hu) = -u$,从而可得 $-\Lambda u = -Hu_x$,从而 $\Lambda u = Hu_x$。然后再次利用 Hilbert 变换 $H(uHu) = \frac{1}{2}[(Hu)^2 - u^2]$,则(25)式变为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\log u(x(\alpha,t))}{\mathrm{d}t^2} &\geqslant \frac{1}{16\pi\ \| u \|_{L^1}}|u(x(\alpha,t),t)|^3 + H(uHu)(x(\alpha,t),t) \geqslant \\ &\frac{1}{16\pi\ \| u \|_{L^1}}|u(x(\alpha,t),t)|^3 + \frac{1}{2}(Hu)^2(x(\alpha,t),t) - \frac{1}{2}u^2(x(\alpha,t),t) \geqslant \\ &\frac{1}{16\pi\ \| u \|_{L^1}}|u(x(\alpha,t),t)|^3 - \frac{1}{2}u^2(x(\alpha,t),t) \geqslant u^2(x(\alpha,t),t)\left[\frac{1}{16\pi\ \| u \|_{L^1}}|u(x(\alpha,t),t)| - \frac{1}{2}\right]。 \end{aligned} \tag{26}$$

如果取初始条件 $u_0(\alpha)$ 充分大,按照 Burgers-CLM 方程的能量守恒定律 $\| u \|_{L^1} = \| u_0 \|_{L^1}$ 和(26)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\log u(x(\alpha,t))}{\mathrm{d}t^2} \geqslant C_0 u^2(x(\alpha,t),t) \geqslant C_0\ (\log u(x(\alpha,t),t))^2, \tag{27}$$

其中在上面式子用到 $\log u(x(\alpha,t))\leqslant\log^{+}u(x(\alpha,t))\leqslant u(x(\alpha,t))$，当 $u(x(\alpha,t))\geqslant 0$ 时。

如果定义 $J(t)=\log u(x(\alpha,t))$，显然由先前的结果可得

$$J_t(t)=Hu(x(\alpha,t)),\tag{28}$$

$$J_{tt}(t)\geqslant C_0J(t)^2,\tag{29}$$

由于 $Hu_0(\alpha_0)>0$ 且 $J_t(t)=Hu(x(\alpha,t))$。从而 $J_t(t)>0$ 且 $J_t(t)>J(0)$ 对于任意的 $t\in(0,t^*)$ 都成立，而 t^* 是充分小的数。在(29)式两边同时乘以 $J_t(t)$ 可得

$$\frac{1}{2}(J_t(t)^2)_t\geqslant C_0J(t)^2J_t(t),t\in[0,t^*]。\tag{30}$$

在不等式 (30)两边同时从 0 到 t 积分，可得

$$J_t(t)\geqslant J_t(0)^2+\frac{2}{3}C_0(J(t)^3-J(0)^3),\forall t\in[0,t^*],\tag{31}$$

由于 $C_0J(0)^2\geqslant 0$，从而 $J_{tt}>J_{tt}(0)\geqslant 0$ 对于任意的 $t\in(0,t^*)$ 都成立。因此 $J_t(t)$ 在 $t\in(0,t^*)$ 时是一个增函数。从而(31)式对于所有的时间 t 都是成立的，这与先前的假设矛盾。综上所述存在有限时间 T 使得方程(1)的解在有限时间内是爆破的，具有奇异性。定理得证。 证毕

致谢：衷心感谢审稿专家们的建设性意见。

参考文献：

[1] Constantin P, Lax P D, Majda A J. A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation[J]. Comm Pure Appl Math, 1985(38): 715-724.

[2] De Gregorio S. On a one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation[J]. J Statist Phys, 1990, 59 (5/6): 1251-1263.

[3] De Gregorio S. A partial differential equation arising in a 1D model for the 3D vorticity equation[J]. Math Meth Appl Sci, 1996 (19): 1233-1255.

[4] Okamoto H, Sakajo T, Wunsch M. On a generalization of the Constantin-Lax-Majda equation[J]. Nonlinearity, 2008, 21(10): 2447-2461.

[5] Antonio C, Diego C, Fontelos M A. Integral inequalities for the Hilbert transform applied to a nonlocal transport equation[J]. J Math Pures Appl, 2006, 86(6): 529-540.

[6] Cordoba A, Cordoba D, Fontelos M A. Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity[J]. Ann Math, 2005, 162(3): 1377-1389.

[7] Sakajo T. Blow-up solutions of the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term[J]. J Math Sci Univ Tokyo, 2003, 10(1): 187-207.

[8] Kiselev A, Nazarov F, Shterenberg R. Blow up and regularity for fractal Burgers equation[J]. Dyn Partial Differ Equ, 2008, 5(3): 211-240.

[9] Angel C. Diego C, Francisco G. Singularity formations for a surface wave model[J]. Nonlinearity, 2010, 23(11): 2835-2847.

[10] Hur V M. On the formation of singularities for surface water waves[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2012, 11(4): 1465-1474.

[11] Hunter J K, Ifrim M. Enhanced life span of smooth solutions of a Burgers-Hilbert equation[J]. SIAM J Math Anal, 2012, 44(3): 2039-2052.

The Singularity Formation for Burgers-Constantin-Lax-Majda Equation

LI Linrui[1], WANG Shu[2], WANG Changyou[3]

(1. Basic Courses Department Institute of Disaster Prevention, Sanhe Hebei 065201;

2. College of Applied Sciences Beijing University of Technology, Beijing 100124;

3. Research Institution of Applied Mathematics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: This paper is concerned with the singularity for a class of generalized Burgers-Constantin-Lax-Majda equation, which has been proposed as a model which shares many properties of the Burgers equation and Constantin-Lax-Majda equation, meanwhile the model has a nonlocal flux of the form uHu where H is the Hilbert transform. We prove the blow up in finite time for a class of non-negative initial data; the main results improve and extend the ones in the previous works to a large extent.

Key words: Burgers-Constantin-Lax-Majda equations; finite time singularity; Hilbert transform; nonlinear nonlocal system

（责任编辑　游中胜）