运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160509

特殊情形下的两台可拒绝同类机在线排序问题*

荣建华[1],侯丽英[2]

(1. 石家庄铁道大学 四方学院基础部,石家庄 051132;2. 南京农业大学 理学院,南京 210095)

摘要:研究了工件带有拒绝费用的两台同类机在线算法,两台机器的速度分别为 1 和 s,$s\in[1,+\infty)$,工件逐个到达,当工件到达时,可以选择被分配到机器上进行加工并花费一定的加工时间;也可以被拒绝,但此时需付出一定的拒绝费用。进一步假定每个工件的加工时间与拒绝费用成固定比例 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$,即 $p_j=\alpha t_j$。目标函数为使被加工工件的最大完工时间与被拒绝工件的总罚值之和最小,工件的加工不可中断。本研究设计一种在线算法 URLS,并证明该算法的竞争比和下界均为关于参数 α 的分段函数,且当 $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\right)\cup[1,+\infty)$ 时上下界相吻合,算法达到最优。

关键词:竞争比;在线排序;同类机;拒绝费用;不可中断

中图分类号:O223 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)05-0007-05

在经典的排序文献中,所有的工件都不允许被拒绝。换言之,任何工件都必须被安排到机器上进行加工。然而在工厂实际生产过程中,生产决策者们并非总是如此。因为一个产品通常是由好多工序及零件组合而成,产品的一些部件可以由厂家自己生产,另一些部件可以向其他厂家进行购买。另外当第三方可以提供更为廉价的服务时,厂家也可以将生产外包给第三方。厂家通过购买或外包的方式来降低成本,提高利润。所以在现有的生产资源有限的前提下,为了使企业获得更多的利润,生产厂家有时不得不拒绝一些资源耗费较多但带来的利润却较少的工件。基于在实际生产中上述问题比较常见,所以工件带拒绝费用的排序问题受到研究人员广泛的关注[1-4]。

对于带拒绝费用的离线的平行机排序问题(简记成 MSR),最开始由 Bartal 等人[5]提出,并确定了一个完全多项式近似方案。对于带拒绝费用的在线的平行机排序问题 MSR,且加工不允许中断,Bartal 等人[5]对任意的机器数 m 设计出一个最优算法 RTP(T),其竞争比为 2.618。文献[6]将该问题推广到两台机器速度比为 s 的同类机上(简记为 USR1),当机器台数分别为 2 和 3 时,给出了在线算法 LSR,证明了其关于机器速度比 s 的参数竞争比。对于加工不可中断(Nonpreemptive)的带拒绝费用的平行机在线排序问题,闵啸等人[7]针对机器数为 2 时,设计出在线算法 NPRL,该算法中工件的加工时间与拒绝费用成固定比例 α,文中证明出算法的竞争比 ρ_{NPRL} 和下界均为关于参数 α 的分段函数。且当 $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup[1,+\infty)$ 时算法达到最优。当机器台数为 3 时,闵啸等人[8]设计出在线算法 PRL,此算法中工件的加工时间与拒绝费用成固定比例 T,并证明了算法的竞争比 ρ_{PRL} 和下界均为关于参数 T 的分段函数。且当 $T\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{6},+\infty\right)$ 时算法最优。

工件带拒绝的同类机排序,由于其固有的难度,目前研究的结果还比较少。本文讨论两台带拒绝费用的同类机在线排序问题。基本问题描述如下:设有两台同类机 M_1,M_2,速度分别为 $s_1=1$ 和 $s_2=s$,$s\in[1,+\infty)$,n 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$,每个工件 J_j 带两个参数(p_j,t_j),p_j 表示拒绝费用,t_j 表示加工时间,且每个工件的加工时间

* **收稿日期**:2016-01-26 **修回日期**:2016-05-31 **网络出版时间**:2016-07-13 14:05

资助项目:国家自然科学基金数学天元基金(No. 11426133);南京农业大学青年科技创新基金(No. 0506J0116);河北省高等教育教学改革研究与实践项目(No. 2015GJJG293)

作者简介:荣建华,女,讲师,研究方向为组合最优化、排序理论、近似算法,E-mail:rongjianhua2006@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1405.050.html

与拒绝费用成固定比例 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$,即 $p_j=\alpha t_j$。目标函数为使被加工工件的最大完工时间与被拒绝工件的总罚值之和最小。工件的加工不可中断。此问题记为 $Q2|nonpmpt,rej,p_j|W$,文中设计出在线算法 URLS,并证明了算法的竞争比为关于参数 α 的分段函数,且在 α 的大部分区间 $\left[0,\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\right)\cup[1,+\infty)$ 内上下界相吻合,URLS 算法达到最优。

1 URLS 算法

为了便于分析算法的竞争比和下界,给出本文常用的一些记号。J 为工件集;J_j 为第 j 个工件;A 为在线算法 URLS 中被加工的工件集;R 为在线算法 URLS 中被拒绝的工件集;$\overline{A}$为最优算法中被加工的工件集;$\overline{R}$为最优算法中被拒绝的工件集;y 为在线算法 URLS 中最后一个被加工的工件,由它决定了被加工工件集的最晚完工时间(Makespan);$L(S)$,$S\subseteq J$ 表示 S 中工件的加工总长度;$P(S)$,$S\subseteq J$ 表示 S 中工件的总拒绝费用;$C(T)$,$T\subseteq J$ 表示 T 为被加工工件集时的最晚完工时间(Makespan);$C^*(T)$,$T\subseteq J$ 表示将 T 中所有工件接收加工产生的最优(Makespan);$W^{\mathrm{URLS}}=C(A)+P(R)$表示在线算法的目标值;$W^*=C(\overline{A})+P(\overline{R})$表示最优目标值;$\rho_{\mathrm{URLS}}$为在线算法 URLS 的竞争比;$d_{\mathrm{NUL}}$是问题的下界。

算法 URLS 1) 若 $\alpha\in\left[0,\frac{2s+1}{2s+2}\right)$,拒绝所有工件;

2) 若 $\alpha\in\left[\frac{2s+1}{2s+2},+\infty\right)$,接收所有工件并按 LS 算法分配加工,即将工件分配给当前能使其最早完工的机器进行加工。

引理 1[9] 设 A 为被加工的工件集,且按 LS 算法在两台同类机上安排加工,x 为最后完工的工件,最大完工时间为 $C(A)$,则有 $C(A)\leqslant\min\left\{\frac{L(A\backslash\{x\})}{s}+\frac{t_x}{s},\frac{L(A\backslash\{x\})}{s+1}+\frac{2t_x}{s+1}\right\}$。

定理 1 URLS 算法的竞争比至多为 $\rho_{\mathrm{URLS}}=\begin{cases}1,0\leqslant\alpha<\frac{1}{s+1}\\ \alpha(s+1),\frac{1}{s+1}\leqslant\alpha<\frac{2s+1}{2s+2}\\ \frac{s+2}{s+1},\frac{2s+1}{2s+2}\leqslant\alpha+\infty\end{cases}$,且界是紧的。

证明 根据 α 的不同取值范围,下面分情况进行讨论。

1) 若 $\alpha\in\left[0,\frac{2s+1}{2s+2}\right)$,根据算法拒绝所有工件,则有:

$$W^{\mathrm{URLS}}=P(J)=P(\overline{A}\cup\overline{R})=P(\overline{A})+P(\overline{R})=\alpha L(\overline{A})+P(\overline{R})\leqslant\alpha(s+1)C(\overline{A})+P(\overline{R})\leqslant \max\{\alpha(s+1),1\}[C(\overline{A})+P(\overline{R})]=\max\{\alpha(s+1),1\}W^*。$$

a) 若 $\alpha(s+1)<1$,即 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{s+1}\right)$,有 $W^{\mathrm{URLS}}\leqslant W^*$,此时算法已为最优;

b) 若 $\alpha(s+1)\geqslant 1$,即 $\alpha\in\left[\frac{1}{s+1},\frac{2s+1}{2s+2}\right)$,有 $W^{\mathrm{URLS}}\leqslant\alpha(s+1)W^*$,即$\frac{W^{\mathrm{URLS}}}{W^*}\leqslant\alpha(s+1)$。

2) 若 $\alpha\in\left[\frac{2s+1}{2s+2},+\infty\right)$,根据算法所有工件被接收,且以 LS 规则分配加工,令 x 为最晚完工工件,由引理 1 可知:

$$W^{\mathrm{URLS}}=C(J)\leqslant\frac{1}{s+1}L(A\backslash\{x\})+\frac{2t_x}{s+1}=\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\cup\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{2t_x}{s+1}=$$

$$\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\backslash\{x\})+\frac{1}{s+1}L(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{2t_x}{s+1}=\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\backslash\{x\})+\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}P(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{2t_x}{s+1}。\quad(1)$$

下面根据 x 在最优解中是否被拒绝再分两种子情形。

a) 若 x 在最优解中被拒绝,即 $x\in\overline{R}$,则由(1)式有:

$$W^{\mathrm{URLS}}\leqslant\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\backslash\{x\})+\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}P(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{2t_x}{s+1}=\frac{1}{s+1}L(\overline{A})+\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}P(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{2}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}p_x\leqslant$$

$$\frac{1}{s+1}L(\overline{A})+\frac{2}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}[P(\overline{R}\backslash\{x\})+p_x]\leqslant C(\overline{A})+\frac{2}{s+1}\times\frac{1}{\alpha}P(\overline{R})\leqslant$$

$$\max\left\{1,\frac{2}{(s+1)\alpha}\right\}[C(\overline{A})+P(\overline{R})]=\max\left\{1,\frac{2}{(s+1)\alpha}\right\}W^*。$$

b）若 x 在最优解中被接收加工，则有 $x\in\overline{A}$，$t_x\leqslant W^*$，

$$W^{\mathrm{URLS}}\leqslant\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\backslash\{x\})+\frac{1}{(s+1)\alpha}P(\overline{R})+\frac{2t_x}{s+1}=\left[\frac{1}{s+1}L(\overline{A}\backslash\{x\})+\frac{t_x}{s+1}\right]+\frac{1}{(s+1)\alpha}P(\overline{R})+\frac{1}{(s+1)\alpha}P(\overline{R})+$$

$$\frac{t_x}{s+1}=\frac{1}{s+1}L(\overline{A})+\frac{1}{(s+1)\alpha}P(\overline{R})+\frac{t_x}{s+1}\leqslant C(\overline{A})+\frac{1}{(s+1)\alpha}P(\overline{R})+\frac{1}{s+1}t_x\leqslant$$

$$C(\overline{A})+P(\overline{R})+\frac{1}{s+1}t_x\leqslant W^*+\frac{1}{s+1}W^*=\frac{s+2}{s+1}W^*。$$

于是得到 $W^{\mathrm{URLS}}\leqslant\max\left\{1,\frac{2}{(s+1)\alpha},\frac{s+2}{s+1}\right\}W^*=\frac{s+2}{s+1}$，即$\frac{W^{\mathrm{URLS}}}{W^*}=\frac{s+2}{s+1}W^*$。

下面构造实例说明上述界是紧的。

当$\alpha\in\left[0,\frac{1}{s+1}\right)$时，算法已为最优。若$\alpha\in\left[\frac{1}{s+1},\frac{2s+1}{2s+2}\right)$，取 2 个工件 $J_1=(1,a)$，$J_2=(s,sa)$，URLS 算法将所有工件全部拒绝，此时由算法所得的目标值 $W^{\mathrm{URLS}}=a(1+s)$，而在最优算法中将以上工件全部接收并分给不同的机器进行加工，得 $W^*=1$，因此$\frac{W^{\mathrm{URLS}}}{W^*}=a(s+1)$。若 $\alpha\in\left[\frac{2s+1}{2s+2},+\infty\right)$，取工件 $J_1=(1,a)$，$J_1=(s,sa)$，$J_3=(s+1,a(s+1))$，URLS 算法将以上工件全部接收并按 LS 算法分配加工，得到 $W^{\mathrm{URLS}}=s+2$，而最优解 $W^*=1+s$。最后得到$\frac{W^{\mathrm{URLS}}}{W^*}=\frac{s+2}{s+1}$。　　证毕

定理 2　对于问题 $Q2|nonpmpt,rej,p_j=\alpha t_j|W$，任何算法 I 的竞争比都不会低于

$$d_{\mathrm{NUL}}=\begin{cases}1,\alpha\in\left[0,\frac{1}{s+1}\right)\\(s+1)\alpha,\alpha\in\left[\frac{1}{s+1},\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\right)\\\frac{1}{\alpha},\alpha\in\left[\frac{\sqrt{s+1}}{s+1},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(s+1)^2}+4}-\frac{1}{2(s+1)}\right)\\\alpha+\frac{1}{s+1},\alpha\in\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(s+1)^2}+4}-\frac{1}{2(s+1)},1\right)\\\frac{s+2}{s+1},\alpha\in[1,+\infty)\end{cases},$$

其中$\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}$和$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(s+1)^2}+4}-\frac{1}{2(s+1)}$分别为方程$\frac{1}{\alpha}=(s+1)\alpha$ 和$\alpha+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{\alpha}$的根。

证明　令 I 为 $Q2|nonpmpt,rej,p_j=\alpha t_j|W$ 问题的任意一个在线算法，下面将构造实例证明此定理结论，当$0\leqslant\alpha<\frac{1}{s+1}$时，算法到达最优，故结论是平凡的。下面将在其他区间段分情况讨论该问题。

1）当$\frac{1}{s+1}\leqslant\alpha<\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}$时，有$\frac{1}{\alpha}>(s+1)\alpha$，取 $J_1=(1,\alpha)$，若 J_1 被接收，则后面不再来工件，此时 $W^I=1$，而 $W^*=\alpha$，所以$\frac{W^I}{W^*}=\frac{1}{\alpha}>(s+1)\alpha$。若 J_1 被拒绝，则再来工件 $J_2=(s,s\alpha)$，若 J_2 被接收，则 $W^*=s+\alpha$，而最优解为将工件 J_1，J_2 分别分给机器 M_1，M_2 加工，即 $W^*=1$，所以$\frac{W^I}{W^*}=s+\alpha>(s+1)\alpha$。否则，若 J_2 被拒绝，则有 $W^I=(s+1)\alpha$，而最优解仍为 $W^*=1$，有$\frac{W^I}{W^*}=(s+1)\alpha$。

2) 当$\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(s+1)^2}+4}-\frac{1}{2(s+1)}$时,有$\alpha+\frac{1}{s+1}<\frac{1}{\alpha}\leqslant(s+1)\alpha$,仍取$J_1=(1,\alpha)$,若$J_1$被拒绝,同样$J_2=(s,s\alpha)$取,若$J_2$被接收,则有$W^I=s+\alpha$,而$W^*=1$,得到$\frac{W^I}{W^*}=s+\alpha>\frac{1}{\alpha}$,若$J_2$被拒绝,则同样有$W^I=(s+1)\alpha$,于是得到$\frac{W^I}{W^*}=(s+1)\alpha\geqslant\frac{1}{\alpha}$,若$J_1=(1,\alpha)$被接收,则后面不来工件,此时显然有$\frac{W^I}{W^*}=\frac{1}{\alpha}$。

3) 当$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(s+1)^2}+4}-\frac{1}{2(s+1)}\leqslant\alpha<1$时,有$\frac{1}{\alpha}\leqslant\alpha+\frac{1}{s+1}$,则仍取$J_1=(1,\alpha)$,若拒绝,再取$J_2=(s,s\alpha)$,如前所述,得到$\frac{W^I}{W^*}=(s+1)\alpha\geqslant\alpha+\frac{1}{s+1}$;若$J_2$被接收,则$\frac{W^I}{W^*}=\alpha+s>\alpha+\frac{1}{s+1}$;若$J_1$被接受,再来$J_2=(s,s\alpha)$,若$J_2$被拒绝,则有$\frac{W^I}{W^*}=1+s\alpha>\alpha+\frac{1}{s+1}$,故$J_2$应被接受,且被分配到不同的机器上加工,否则$W^I=1$,则后面不来工件,此时有$\frac{W^I}{W^*}=2>\alpha+\frac{1}{s+1}$。再到达$J_3=(2s,2s\alpha)$,若$J_3$被接收,则$W^I=2s+1$,而$W^*=s+1$,$\frac{W^I}{W^*}=\frac{2s+1}{s+1}>\alpha+\frac{1}{s+1}$,所以$J_3$应被拒绝,此时$W^I=1+2s\alpha$,最优解为$W^*=s+1$,于是最终有$\frac{W^I}{W^*}=\frac{1+2s\alpha}{s+1}=\frac{1}{s+1}+\frac{2s\alpha}{s+1}>\frac{1}{s+1}+\alpha$。

4) 当$1\leqslant\alpha<+\infty$时,再取$J_1=(1,\alpha)$,$J_2=(s,s\alpha)$,则两个工件都应被接收且分给不同的机器加工,否则,$W^I=(s+1)\alpha$,$1+s\alpha$,或者$1+s$,最优解显然为$W^*=1$,无论哪一种情况均有$\frac{W^I}{W^*}\geqslant1+s>\frac{s+2}{s+1}$,再来$J_3=(2s,2s\alpha)$,若被拒绝,则显然有$\frac{W^I}{W^*}=\frac{1+2s\alpha}{s+1}=\frac{1}{s+1}+\frac{2s\alpha}{s+1}>\frac{s+2}{s+1}$。若被接受,则最终有$\frac{W^I}{W^*}=\frac{2s+1}{s+1}>\frac{s+2}{s+1}$。

综上分析可以得到问题$Q2|nonpmpt,rej,p_j=\alpha t_j|W$的一个下界$d_{\mathrm{NUL}}$。　证毕

2 结束语

本文将带拒绝费用的平行机排序问题推广到两台同类机上,两台机器的速度分别为$s_1=1$,$s_2=s$ $(s\geqslant1)$且不允许中断加工,设计出在线算法URLS,并证明了算法的竞争比和下界均为关于参数α的分段函数。且在α的大部分区间$\left[0,\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\right)\cup[1,+\infty)$内上下界相吻合,URLS算法达到最优。但是当$\alpha\in\left[\frac{\sqrt{s+1}}{s+1},1\right)$时,URLS算法的竞争比和该问题的下界还有一定差距,下一步将致力于构造更优的算法进一步缩短区间$\alpha\in\left[\frac{\sqrt{s+1}}{s+1},1\right)$内上下界间的差距。

参考文献:

[1] Epstein L, Sgall J. Approximation schemes for scheduling on uniformly related and identical parallel machines[J]. Algorithmica, 2004, 39: 43-57.

[2] Dosa G, He Y. Preemption and non-preemption on-line algorithms for schuduling with rejection on two uniform machines[J]. Computing, 2006, 76: 149-162.

[3] 张树霞,张峰. 极小化加权总完工时间的工件可拒绝排序[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2012, 29(5): 10-12.
Zhang S X, Zhang F. Scheduling with rejection to minimize the total weighted completion time[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(5): 10-12.

[4] 刘澈,罗成新. 带到达时间、不可用区间、拒绝工件的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2013, 30(1): 17-20.
Liu C, Luo C X. Single machine scheduling problem with release dates, rejection and an unavailable interval[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(1): 17-20.

[5] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[J]. SIAM J on Discrete Mathematics, 2000, 13: 64-78.

[6] He Y, Min X. On-line uniform machine scheduling with re-

jection[J]. Computing,2000,65:1-12.

[7] 闵啸.一种特殊情形不可中断的两台可拒绝同型机在线排序问题[J].数学的实践与认识,2006,36(4):1-6.

Min X. A special case of nonpreemptive on-line scheduling on two identical machine with rejection[J]. Mathematics in Practice and Theory,2006,36(4):1-6.

[8] 闵啸.一特殊情形的三台可拒绝同型机在线排序问题[J],嘉兴学院学报,2006,18(3):44-47.

Min X. A special case of nonpreemptive on-line scheduling on three identical machine with rejection[J]. Journal of Jiaxing University,2006,18(3):44-47.

[9] Min X,Liu J,Wang Y Q. Optimal semi-online algorithm for scheduling with rejection on two uniform machines[J]. J Comb Optim,2011,22:674-683.

[10] 荣建华,彭丽,张玲玲,等.一个可中断三台可拒绝平行机半在线排序问题[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2016,33(3):5-10.

Rong J H,Peng L,Zhang L L. Preemptive semi on-line scheduling on three identical machines with rejection[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science,2016,33(3):5-10.

Operations Research and Cybernetics

A Special Case of On-line Scheduling on Two Uniformly Machines with Rejection

RONG Jianhua[1], HOU Liying[2]

(1. Basic Department of Sifang College, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 051132;

2. College of Sciences, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract: This paper investigates the on-line scheduling problem on two uniform machines with rejection. Supposing two uniform machines with speed 1 and $s, s\in[1,+\infty)$. The job comes one by one, and when a job arrives, it can be accepted and scheduled on some machine or rejected by paying its penalty. And it is further assumed that the processing time of each job and its penalty forms the regular proportion denoted by $\alpha(\alpha\geqslant 0)$ in advance. The objective is to minimize the sum of the make span produced by the accepted jobs and the total penalty of the jobs which have been rejected. Preemption is not allowed. For this version, we present an on-line algorithm URLS and prove the competitive ratio. A lower bound of this problem is proposed which shows that in the interval of $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{s+1}}{s+1}\right)\cup[1,+\infty)$ our algorithm is optimal.

Key words: competitive ratio; on-line scheduling; uniform machine; rejection; nonpreemptive

(责任编辑 黄 颖)