2016 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2016
第 33 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 33 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20160506

# 多项式环上带权的单项式导子*

谷伟平[1]，董　晶[2]

(1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院，重庆 401524；
2. 信阳职业技术学院 数学与计算机科学学院，河南 信阳 464000)

**摘要**:设 $k$ 是特征为零的域,$k[x]$为 $k$ 上的多项式环,给出了 $k[x]$上带权单项式导子的概念,然后通过对权是否为零进行分类讨论,证明了 $D$ 是权为零的非零单项式导子当且仅当存在 $b\in k\backslash\{0\}$,$s\in\mathbf{N}$,使得对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $d(x^n)=nbx^{s+n-1}$;$D$ 是权为 $\lambda\neq0$ 的非零单项式导子当且仅当存在 $a\in k\backslash\{0\}$,使得 $D(x^n)=\begin{cases}0, n=0\\ \lambda^{-1}((\lambda a+1)^n-1)x^n, n\geqslant1\end{cases}$。

**关键词**:导子;权;多项式环;单项式

**中图分类号**:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)05-0063-04

## 1 预备知识

微分代数是一个带有导子的代数,起源于上世纪 Ritt 和 Kolchin 利用代数的观点研究微分方程[1],它在数理逻辑、算术几何、计算代数和机器证明中均有广泛应用[2-3]。导子是微分代数上的一个线性算子,可以看作是分析学中求导算子的进一步抽象。2008 年,Guo 与 Keigher[4]推广了导子的概念,定义了带权的导子,并研究了它与罗巴代数之间的关系。带权导子在 Operad[5]、微分方程的线性边值问题[6]等理论中均有重要应用。

交换环 $k$ 上单变元多项式环 $k[x]$是数学中一个经典的研究对象。例如,在代数学中它是交换代数的自由对象,在分析学中,取 $k$ 为实数域,则 $k[x]$中的多项式函数是解析函数的逼近函数。$k[x]$为研究导子的代数性质与分析性质提供了良好的载体。$k[x]$上求导算子可以看作是权为零的导子,其运算规则是一个经典的结论,但是对于一般带权的导子的结构尚不清楚。本文将对 $k[x]$上带权的单项式导子进行完全分类。

下面先给出本文所需要的基本定义与符号。如不特别说明,用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数集,用 $k$ 表示一个特征为零的域。其他符号和概念参见文献[7-8]。

**定义 1**　设 $k$ 是一个特征为零的域,$A$ 是一个 $k$-代数,$\lambda$ 是 $k$ 中一个元素。若线性映射 $D:A\to A$ 满足莱布尼茨法则,即对任意 $x,y\in A$ 有 $D(xy)=D(x)y+xD(y)+\lambda D(x)D(y)$,则称 $D$ 是一个权为 $\lambda$ 的导子(也叫作微分算子),称$(A,D)$为一个权为 $\lambda$ 的微分 $k$-代数。

例如,实数域 $\mathbf{R}$ 上所有无限可微函数的全体是一个权为零的微分 $\mathbf{R}$-代数,其中导子 $D$ 是通常意义下的求导算子 $d$。

**定义 2**　设 $D$ 是 $k[x]$上的一个导子。若存在映射 $\beta:\mathbf{N}\to k$ 和 $\theta:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 使得对任意 $n\in\mathbf{N}$,都有

$$D(x^n)=\beta(n)x^{\theta(n)},\tag{1}$$

则称 $D$ 为 $k[x]$上的单项式导子。

下面给出一些带权单项式导子的例子。

**例 1**　(i) 给定 $b\in k\backslash\{0\}$,$s\in\mathbf{N}$,则 $D(x^n)=nbx^{s+n-1}$是权为 0 的导子。事实上,此时 $D$ 可以看作是 $bx^s$ 与求导算子 $d$ 的乘积,即 $D(x^n)=bx^sd(x^n)$。

(ii) 给定 $\lambda\in k\backslash\{0\}$, $D(x^n)=-\lambda^{-1}x^n$ 是权为 $\lambda$ 的单项式导子,此时 $D$ 是数乘运算。特别地,$k[x]$上恒等映

* 收稿日期:2015-05-27　修回日期:2016-07-13　网络出版时间:2016-07-13 14:05
资助项目:重庆人文科技学院教改项目(No. 15CRKXJ05)
作者简介:谷伟平,女,讲师,研究方向为代数理论,E-mail:weipinggu913@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1405.054.html

射是权为$-1$的单项式导子。

假定本文中所有单项式导子都形如(1)式。为了方便起见，记 $Z_\beta$ 为 $\beta$ 的零点集，即 $Z_\beta=\{n\in\mathbf{N}\mid\beta(n)=0\}$，并记 $S_\beta=\mathbf{N}\backslash Z_\beta$，称为 $\beta$ 的支撑集。类似定义 $Z_\theta$ 与 $S_\theta$ 分别为映射 $\theta$ 的零点集与支撑集。如果 $\beta(n)=0$，那么总有 $D(x^n)=0$，从而 $\theta(n)$ 的值并不影响 $D(x^n)$ 的取值，如不特别说明，规定此时 $\theta(n)=0$，故有 $Z_\beta\subseteq Z_\theta$。

## 2 $k[x]$上带权单项式导子的分类

下面对 $k[x]$ 上所有带权的单项式导子进行分类，为此首先给出权为 $\lambda$ 的单项式导子的一个等价描述。

**引理 1** 设 $D$ 是 $k[x]$ 上一个单项式线性算子，则以下 3 个命题等价：

(i) $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda$ 的单项式导子；

(ii) 对任意 $m,n\in\mathbf{N}$，都有 $D(x^{m+n})=D(x^m)x^n+x^mD(x^n)+\lambda D(x^m)D(x^n)$；

(iii) 对任意 $m,n\in\mathbf{N}$，都有

$$\beta(m+n)x^{\theta(m+n)}=\beta(n)x^{m+\theta(n)}+\beta(m)x^{\theta(m)+n}+\lambda\beta(m)\beta(n)x^{\theta(m)+\theta(n)}。\tag{2}$$

**证明** 根据定义 1，命题(i)蕴含命题(ii)；由定义 2 知，命题(ii)等价于命题(iii)。因此，下面只须证明命题(ii)蕴含命题(i)。

假设命题(ii)成立。任取 $f(x),g(x)\in k[x]$，并设 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$。由 $D$ 的线性性可知：

$$\begin{aligned}&D(f(x))g(x)+f(x)D(g(x))+\lambda D(f(x))D(g(x))=\\&\Big(\sum_{i=0}^{m}a_iD(x^i)\Big)g(x)+f(x)\Big(\sum_{j=0}^{n}b_jD(x^j)\Big)+\lambda\Big(\sum_{i=0}^{m}a_iD(x^i)\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}b_jD(x^j)\Big)=\\&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_ib_j(D(x^i)x^j)+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_ib_j(x^iD(x^j))+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_ib_j(\lambda D(x^i)D(x^j))=\\&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_ib_j(D(x^i)x^j+x^iD(x^j)+\lambda D(x^i)D(x^j))=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_ib_jD(x^ix^j)=D(f(x)g(x))。\end{aligned}$$

从而由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意性可知，$D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda$ 的单项式导子。 证毕

**引理 2** 设 $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda$ 的单项式导子。若 $0\notin Z_\beta$，则 $\lambda\neq0$，并且对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有 $D(x^n)=-\lambda^{-1}x^n$。

**证明** 在(2)式中取 $m=0$，则对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\beta(0)x^{\theta(0)+n}+\lambda\beta(0)\beta(n)x^{\theta(0)+\theta(n)}=0$。

由于 $0\notin Z_\beta$，故 $\beta(0)\neq0$，从而 $\beta(0)+\lambda\beta(0)\beta(n)=0$，并且 $n+\theta(0)=\theta(n)+\theta(0)$。因此 $\lambda\neq0$ 且 $\beta(n)=-\lambda^{-1}$，$\theta(n)=n$，故由定义 2 可得 $D(x^n)=-\lambda^{-1}x^n$ 成立。 证毕

上述引理实际上说明了若 $0\notin Z_\beta$，则导子 $D$ 的权不为零，并且此时 $\mathrm{im}(\beta)=-\lambda^{-1}$，从而 $Z_\beta=\varnothing$。下面的引理 3 将给出 $Z_\beta$ 的一般结构。但在此引理的证明过程中会用到数值半群的一个基本结论，因此首先回顾数值半群的定义。

设 $S$ 是自然数加法半群 $\mathbf{N}$ 的子半群。如果 $S$ 在 $\mathbf{N}$ 中有有限补，即 $\mathbf{N}\backslash S$ 是有限集，则称 $S$ 是一个数值半群。由文献[9]中的引理 2.1 可知，$\mathbf{N}$ 的一个子半群 $S$ 是一个数值半群当且仅当 $S$ 中所有元素的最大公因子为 1，即 $\gcd(S)=1$。

**引理 3** 若 $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda$ 的单项式导子。则或者 $Z_\beta$ 是空集，或者存在 $e\in\mathbf{N}$，使得 $Z_\beta=e\mathbf{N}$。

**证明** 由引理 2 知，$\beta(0)\neq0$ 时，$Z_\beta$ 是空集。若 $\beta(0)=0$，则 $0\in Z_\beta$，从而 $Z_\beta$ 不是空集，取 $m,n\in Z_\beta$，则由(2)式得 $\beta(m+n)x^{\theta(m+n)}=0$，从而 $\beta(m+n)=0$，于是 $m+n\in Z_\beta$，这说明 $Z_\beta$ 是 $\mathbf{N}$ 的子半群。令 $e=\gcd(Z_\beta)$。若 $e=0$，则 $Z_\beta=\{0\}$，从而结论成立。以下假设 $e\geqslant1$，证明 $Z_\beta=e\mathbf{N}$。

当 $D$ 是零算子时，$Z_\beta=\mathbf{N}$，取 $e=1$ 即可。以下假设 $D$ 是非零算子，即 $Z_\beta\neq\mathbf{N}$，从而 $Z_\beta$ 与 $S_\beta$ 都非空。此时必有 $S_\beta+Z_\beta\subseteq S_\beta$ 成立。事实上，任取 $m\in S_\beta$，$n\in Z_\beta$，由(2)式知，$\beta(m+n)x^{\theta(m+n)}=\beta(m)x^{\theta(m)+n}$。注意到 $\beta(m)\neq0$，所以 $\beta(m+n)=\beta(m)\neq0$，因此 $m+n\in S_\beta$，即 $S_\beta+Z_\beta\subseteq S_\beta$。

由 $e=\gcd(Z_\beta)$ 可知 $\frac{1}{e}Z_\beta$ 是一个数值半群，从而 $\frac{1}{e}Z_\beta$ 在 $\mathbf{N}$ 中有有限补。于是存在 $f\in\mathbf{N}$ 使得 $f\in\frac{1}{e}Z_\beta$，并且 $f+\mathbf{N}\subseteq\frac{1}{e}Z_\beta$，即 $ef+e\mathbf{N}\subseteq Z_\beta$。若 $e\mathbf{N}\not\subset Z_\beta$，则存在 $k\in\mathbf{N}$ 使得 $ek\notin Z_\beta$，即 $ek\in S_\beta$，从而 $ek+ef\in S_\beta+Z_\beta\subseteq S_\beta$。但是 $ek+ef\in ef+e\mathbf{N}\subseteq Z_\beta$，矛盾。故 $e\mathbf{N}\subseteq Z_\beta$。

另一方面，$Z_\beta \subseteq e\mathbf{N}$ 显然成立，所以 $Z_\beta = e\mathbf{N}$，结论成立。　证毕

**引理 4**　设 $D$ 是 $k[x]$ 上一个权为零的非零导子。则 $Z_\beta = \{0\}$。

**证明**　因为 $D$ 的权为零，所以由引理 2 可知 $\beta(0)=0$。从而，根据引理 3，必存在 $e\in\mathbf{N}$，使得 $Z_\beta = e\mathbf{N}$。下证 $e=0$。

假设 $e\neq 0$。因为 $D$ 是非零导子，故 $e\neq 1$，从而 $e\geqslant 2$。对于任意自然数 $m\geqslant 1$，在(2)式中分别取 $m,n$ 为 $m-1$ 与 1，则有：

$$\beta(m)x^{\theta(m)} = \beta(1)x^{m-1+\theta(1)} + \beta(m-1)x^{\theta(m-1)+1}, \tag{3}$$

故总有 $\beta(m)=\beta(m-1)+\beta(1)$，从而可以递推出 $\beta(m)=m\beta(1)$。特别地，有 $e\beta(1)=\beta(e)=0$，即 $\beta(1)=0$。因此，$1\in Z_\beta = e\mathbf{N}$，于是必有 $e=1$，矛盾，所以假设错误，命题得证。　证毕

**定理 1**　设 $D$ 是 $k[x]$ 上一个非零单项式导子。则 $D$ 是权为零当且仅当存在 $b\in k\backslash\{0\}$，$s\in\mathbf{N}$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有

$$D(x^n) = nbx^{s+n-1}。 \tag{4}$$

**证明**　容易验证(4)式在 $k[x]$ 上定义了一个非零单项式线性算子，并且对任意 $m,n\in\mathbf{N}$，都有

$$D(x^{m+n}) = (m+n)bx^{s+m+n-1} = x^m(nbx^{s+n-1}) + x^n(mbx^{s+m-1}) = x^mD(x^n) + D(x^m)x^n,$$

因此，由引理 1 知 $D$ 是 $k[x]$ 上权为零的导子。

反之，假设 $D$ 是 $k[x]$ 上权为零的非零导子。由引理 4 知 $Z_\beta=\{0\}$。因此，对任意 $m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0\}$，(2)式中右边第三项为零，而其余各项均不为零，从而有：

$$\beta(m+n) = \beta(m)+\beta(n), \tag{5}$$

$$\theta(m+n) = \theta(m)+n = m+\theta(n)。 \tag{6}$$

由(5)式易知 $\beta(n)=\beta(1)+\beta(n-1)=\cdots=n\beta(1)$，由(6)式易知 $\theta(n)=\theta(1)+n-1$。取 $b=\beta(1)$，$s=\theta(1)$，即有 $D(x^n)=nbx^{s+n-1}$，命题成立。　证毕

以下考虑权不为零的非零单项式导子。

**引理 5**　设 $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda\neq 0$ 非零单项式导子。则对任意 $n\in S_\beta$，都有 $\theta(n)=n$。

**证明**　若 $0\notin Z_\beta$，则由引理 2 可知命题成立。若 $0\in Z_\beta$，则由引理 3 知，存在 $e\in\mathbf{N}$ 使得 $Z_\beta=e\mathbf{N}$。因为 $D$ 非零，故 $e\neq 1$。下面分 $e=0$ 和 $e\geqslant 2$ 两种情形讨论。

若 $e=0$，则 $Z_\beta=\{0\}$，$S_\beta=\mathbf{N}\backslash\{0\}$。在(2)式中取 $m=n\in S_\beta$，从而有 $\beta(2n)x^{\theta(2n)} = 2\beta(n)x^{n+\theta(n)} + \lambda\beta(n)^2x^{2\theta(n)}$。显然上式的各项系数均不为零，故必有 $\theta(2n)=n+\theta(n)=2\theta(n)$，于是 $\theta(n)=n$，命题成立。

若 $e\geqslant 2$，注意到 $S_\beta=\mathbf{N}\backslash Z_\beta$，故对任意 $n\in S_\beta$ 必存在 $m\in S_\beta$，使得 $m+n\in Z_\beta$。于是(2)式左边为 0，右边各项系数均不为 0，从而幂指数相等，即 $m+\theta(n)=\theta(m)+n=\theta(m)+\theta(n)$，所以 $\theta(n)=n$，命题亦成立。　证毕

**定理 2**　设 $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda\neq 0$ 的非零线性算子，则 $D$ 是单项式导子当且仅当存在 $a\in k\backslash\{0\}$，使得：

$$D(x^n) = \begin{cases} 0, n=0 \\ \lambda^{-1}((\lambda a+1)^n-1)x^n, n\geqslant 1 \end{cases}。 \tag{7}$$

**证明**　根据引理 1，容易验证(7)式所定义的算子是 $k[x]$ 上权为 $\lambda$ 的单项式导子。反之，假设 $D$ 是 $k[x]$ 上权为 $\lambda\neq 0$ 的非零单项式导子，下证 $D$ 必形如(7)式。

若 $0\notin Z_\beta$，则由引理 2 可知，$D(x^n)=-\lambda^{-1}x^n$，此时取 $a=-\lambda^{-1}$ 即可。以下假设 $0\in Z_\beta$。据引理 3，存在 $e\in\mathbf{N}$ 使得 $Z_\beta=e\mathbf{N}$。由 $D$ 是非零算子可知 $e\neq 1$，即 $1\notin Z_\beta$，从而对任意 $n\in\mathbf{N}$，$n$ 与 $n+1$ 不同时属于 $Z_\beta$。

设 $\beta(1)=a$。显然 $a\neq 0$。在(2)式中取 $m=1$ 可得

$$\beta(n+1)x^{\theta(n+1)} = \beta(n)x^{\theta(n)+1} + ax^{n+\theta(1)} + \lambda a\beta(n)x^{\theta(n)+\theta(1)}。 \tag{8}$$

若 $n\in Z_\beta$，则 $\beta(n)=0$，而 $n+1\in S_\beta$，于是由引理 5 知 $\theta(n+1)=n+\theta(1)=n+1$，从而由(8)式得

$$\beta(n+1) = \beta(n)+a+\lambda a\beta(n)。 \tag{9}$$

若 $n\in S_\beta$，同时 $n+1\in S_\beta$，则据引理 5 知(8)式各项的幂指数均为 $n+1$，则(9)式成立。若 $n\in S_\beta$，但是 $n+1\in Z_\beta$，则(8)式左边为 0，据引理 5 知(8)式右边各项指数均为 $n+1$，从而各项系数之和为 0，即(9)式亦成立。因此，当 $0\in Z_\beta$ 时，(9)式成立。下面对 $n$ 进行归纳证明

$$\beta(n) = \lambda^{-1}((\lambda a+1)^n-1)。 \tag{10}$$

当 $n=1$ 时，(10)式显然成立。假设当 $n-1\geqslant 1$ 时，结论成立。则由(9)式知：

$\beta(n)=a+\beta(n-1)+\lambda a\beta(n-1)=a+\lambda^{-1}((\lambda a+1)^{n-1}-1)+\lambda a\lambda^{-1}((\lambda a+1)^{n-1}-1)=\lambda^{-1}((\lambda a+1)^{n}-1)$。因此,(10)式成立。

若 $e=0$,则 $S_\beta=\mathbf{N}\backslash\{0\}$,从而对任意 $n\in\mathbf{N}$,有 $\theta(n)=n$,因此 $D(x^n)=\lambda^{-1}((\lambda a+1)^n-1)x^n$,故(7)式成立。

若 $e>1$,则由 $Z_\beta=e\mathbf{N}$ 知 $\beta(e)=0$,从而 $(\lambda a+1)^e=1$。特别地,当 $n\in Z_\beta$ 时,总有 $\beta(n)=0$。由于此时 $\theta(n)$ 的取值并不影响 $D(x^n)$ 的值,故为了给出 $D(x^n)$ 的一个统一表达式,令 $\theta(n)=n$,则(7)式亦成立。命题得证。 证毕

**注 1** 对于 $k[x]$ 中任意元素 $f(x)$,由 $D(x^n)=f(x)d(x^n)$ 定义的算子 $D$ 是一个权为零的导子,这里 $d$ 是通常的微分算子,反之 $k[x]$ 上权为零的导子也必然可如此给出。然而,对权不为零的导子的情形尚待进一步研究。

**参考文献:**


[1] Kolchin E R. Differential algebras and algebraic groups[M]. NewYork: Academic Press, 1973.

[2] Buterina S A, Choque Rivero A E. On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions[J]. Appl Math Lett, 2015, 48: 150-155.

[3] Buchberger B, Rosenkranz M. Transforming problems from analysis to algebra: a case study in linear boundary problems[J]. J Symbolic Comput, 2012, 47(6): 589-609.

[4] Guo L, Keigher W. On differential Rota-Baxter algebras[J]. J Pure Appl Algebra, 2008, 212: 522-540.

[5] Loday J L. On the operad of associative algebras with derivation[J]. Georgian Math J, 2010, 17: 347-372.

[6] Rosenkranz M, Regensburger G. Solving and factoring boundary problems for linear ordinary differential equations in differential algebra[J]. J Symbolic Comput, 2008, 43: 515-544.

[7] 刘绍学,郭晋云,朱彬,等. 环与代数[M]. 北京:科学出版社,2009.
Liu S X, Guo J Y, Zhu B, et al. Rings and algebras[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[8] 聂灵沼,丁石孙. 代数学引论[M]. 北京:高等教育出版社,2000.
Nie L Z, Ding S S. An introduction to algebra[M]. Beijing: Higher Education Press, 2000.

[9] Rosales J C, Garcia-Sanchez P A. Numerical semigroups[M]. NewYork: Springer, 2009.


## Monomial Derivations with Weight on Polynomial Rings


GU Weiping[1], DONG Jing[2]

(1. School of Mechanical Electronic and Information Engineering, Chongqing College of Humanities Science and Technology, Chongqing 401524;
2. School of Mathematics and Computer Science, Xinyang Vocational and Technical College, Xinyang Henan 464000, China)



**Abstract**: Monomial derivation with weight on $k[x]$, the polynomial ring over characteristic zero filed $k$, is defined. Then the classification of this kind of derivations is established by discussing whether the weight is zero. More precisely, it is showed that $D$ is a nonzero monomial derivation with weight zero if and only if there exist $b\in k\backslash\{0\}, s\in\mathbf{N}$, such that $d(x^n)=nbx^{s+n-1}$ for all $n\in\mathbf{N}$; It is also proved that $D$ is a nonzero monomial derivation with weight $\lambda\neq 0$ if and only if there exists $a\in k\backslash\{0\}$ such that $D(x^n)=\begin{cases}0, n=0\\ \lambda^{-1}((\lambda a+1)^n-1)x^n, n\geqslant 1\end{cases}$.



**Key words**: derivation; weight; polynomial ring; monomial

(责任编辑 黄 颖)