DOI:10.11721/cqnuj20160525

Orlicz 差分体的基本性质*

夏落燕[1],柏仕坤[2],曾春娜[2]
(1. 重庆人文科技学院 数学系,重庆 401524;2. 重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:研究了空间凸体的 Orlicz 差分体及其基本性质。受 Lutwak 定义的 L_p 差分体和 Orlicz 加法的启发,将 L_p 差分体的概念推广到 Orlicz 空间,定义了对称 Orlicz 差分体、不对称 Orlicz 差分体。在此基础之上,利用支持函数的性质,得到了对称 Orlicz 差分体及不对称 Orlicz 差分体的基本性质。

关键词:Orlicz 差分体;Orlicz 和;凸体

中图分类号:O186.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)05-0077-03

凸几何的主要研究对象是欧氏空间中的凸体,设 K^n 表示欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸体(具有非空内点的紧致凸集)构成的集合。Minkowski 的一项非常重要工作是在 K^n 上定义了加法和数乘运算(即 Minkowski 线性和与 Minkowski 数乘),使得 K^n 成为线性空间,从而逐渐形成了凸几何的核心理论—Brunn-Minkowski 理论。由 Minkowski 线性和所定义的一个重要凸体—差分体(The difference body)是凸几何中重要的研究对象之一,与其相关的是著名的 Rogers-Shephard 不等式[1-2,6]。

上个世纪凸几何取得了长足发展,经典的 Brunn-Minkowski 理论发展为 L_pBrunn-Minkowski 理论($p\geqslant 1$)。首要工作是定义对应的"加法"与"数乘"运算,随之而出现了 Minkowski-Firey-L_p 和与数乘。Lutwak[4] 利用 Minkowski-Firey L_p 和定义了 L_p 差分体,成为解决 L_p-Minkowski 问题(是 L_p-Brunn-Minkowski 理论中一个非常重要问题)的重要工具。同时,数学家们也提出了 L_p-Rogers-Shephard 问题,然而目前仅成功解决了平面情形[1],高维中的 L_p-Rogers-Shephard 问题仍是公开问题。最近,文献[8]定义了不对称的 L_p 差分体,并讨论了它的一些极值问题。

本世纪初期,出现了 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论的萌芽。在过去的十多年里,Orlicz-Brunn-Minkowski 理论日趋成熟。文献[7]定义了 Orlicz 和与数乘。文献[5]定义了 Orlicz 差分体,并讨论了平面上的 Orlicz Rogers Shephard 问题。

受文献[3,8]的启发,利用凸体的 Orlicz 和定义了不对称的 Orlicz 差分体,并讨论了它的一些基本性质。

1 预备知识

设 K_o^n 和 K_s^n 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点在内部和关于原点对称的凸体。S^{n-1}表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面,单位球记为 B。设 $V(K)$表示凸体 K 的 n 维体积。设 $K\in\mathbf{K}^n$,则 K 的支持函数 $h_K(\cdot)=h(K,x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 定义为 $h(K,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\}$,其中 $x\cdot y$ 表示 x 和 y 的标准内积。凸体 K 被它的支持函数 $h_K(\cdot)$唯一确定。由支持函数的定义不难发现,凸体 $-K=\{-x:x\in K\}$的支持函数满足 $h(-K,x)=h(K,-x)$。

令 C_1 表示所有严格递增的凸函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$且满足 $\varphi(0)=0$ 的集合。设 $\varphi\in C_1$,$K,L\in\mathbf{K}_o^n$ 并且实数 $\lambda>0,\mu\geqslant 0$,则 Orlicz 和 $M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)$的支持函数满足[7]:

$$h_{M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)}(u)=\inf\left\{t>0:\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{t}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{t}\right)\leqslant 1\right\}。$$

* **收稿日期**:2015-12-01 **修回日期**:2016-03-17 **网络出版时间**:2016-07-13 14:00

资助项目:国家自然科学基金天元基金(No.11326073);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500312);重庆市基础与前沿研究项目(No.cstc2014jcyjA00019)

作者简介:夏落燕,女,研究方向为几何不等式,E-mail:xialuoyan1021@163.com;**通信作者**:柏仕坤,副教授,E-mail:874960283@qq.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1400.016.html

当 $\varphi(t)=t^p(p\geqslant 1)$时，Orlicz 和即 Minkowski-FireyL_p 和。由 Orlicz 和与 $z\to\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{z}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{z}\right)$的严格递增性可得[7]：

$$h_{M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)}=t_u \text{ 当且仅当 } \lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{t}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{t}\right)=1。\tag{1}$$

根据(1)式可得 $M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)=M_\varphi(\mu,\lambda;L,K)$。

2 Orlicz 差分体的性质

首先给出 Orlicz 差分体的定义。设 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$\varphi\in C_1$ 且 $\tau\in[-1,1]$，则定义不对称的 Orlicz 差分体为：

$$\Delta_\varphi^\tau=M_\varphi(f_1(\tau),f_2(\tau);K,-K)。\tag{2}$$

其中 $f_1(\tau)=\frac{\varphi(1+\tau)}{\varphi(1-\tau)+\varphi(1+\tau)}$，$f_2(\tau)=\frac{\varphi(1-\tau)}{\varphi(1-\tau)+\varphi(1+\tau)}$。当 $\tau=0$ 时，上式为 $\Delta_\varphi K=M_\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};K,-K\right)$。由 Orlicz 和知，$\Delta_\varphi K$ 是关于原点对称的凸体，称为对称的 Orlicz 差分体。当 $\varphi(t)=t^p$ 且 $p\geqslant 1$ 时，不对称的 Orlicz 差分体(2)式即是 Wang 和 Ma 定义的 L_p 不对称差分体，而对称的 Orlicz 差分体即是 Lutwak 定义的 L_p 差分体。

由于 φ 是严格递增的函数，因此 $f_1(\tau)$，$f_2(\tau)$满足：

$$f_1(-\tau)=f_2(\tau),f_2(-\tau)=f_1(\tau),f_1(\tau)+f_2(\tau)=1。\tag{3}$$

根据(1)式，不对称的 Orlicz 差分 $\Delta_\varphi^\tau K$ 的支持函数满足：

$$f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau K}(u)}\right)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau K}(u)}\right)=1。\tag{4}$$

对称 Orlicz 差分体 $\Delta_\varphi K$ 的支持函数满足：

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)=1。\tag{5}$$

特别地，有

$$\Delta_\varphi^0 K=\Delta_\varphi K,\Delta_\varphi^1 K=K,\Delta_\varphi^{-1}K=-K。\tag{6}$$

下面给出 Orlicz 差分体的一些基本性质。

定理 1 设 $\varphi\in C_1$ 且满足 $\varphi(1)=1$。若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，则 $\Delta K\subset\Delta_\varphi K$，且等号成立当 K 是原点对称的凸体。

证明 根据 φ 是凸函数和(5)式可得

$$1=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)\geqslant\varphi\left(\frac{h_K(u)}{2h_{\Delta_\varphi K}(u)}+\frac{h_{-K}(u)}{2h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)=\varphi\left(\frac{h_{\Delta K}(u)}{h_{\Delta_\varphi K}(u)}\right)。$$

又因为 $\varphi\in C_1$ 且满足 $\varphi(1)=1$，所以上式说明对任意的 $u\in S^{n-1}$ 有 $h_{\Delta K}(u)\leqslant h_{\Delta_\varphi K}(u)$，此即 $\Delta K\subset\Delta_\varphi K$。

定理 2 设 $\varphi\in C_1$，$K\in\mathcal{K}_o^n$，当 $\tau\in[-1,1]$时，则：

$$\Delta_\varphi^{-\tau}K=\Delta_\varphi^\tau(-K)=-\Delta_\varphi^\tau K\tag{7}$$

证明 结合 Orlicz 差分体的定义(2)式，可得：

$$\Delta_\varphi^{-\tau}K=M_\varphi(f_1(-\tau),f_2(-\tau);K,-K)=M_\varphi(f_1(\tau),f_2(\tau);-K,K)=\Delta_\varphi^\tau(-K)。$$

因此得到了(7)式的左式。另一方面，$\Delta_\varphi^\tau(-K)$的支持函数满足：

$$f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau(-K)}(u)}\right)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau(-K)}(u)}\right)=1。\tag{8}$$

且$-\Delta_\varphi^\tau K$ 的支持函数满足：

$$f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{-\Delta_\varphi^\tau K}(u)}\right)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{-\Delta_\varphi^\tau K}(u)}\right)=f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(-u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau K}(-u)}\right)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_{-K}(-u)}{h_{\Delta_\varphi^\tau K}(-u)}\right)=1。\tag{9}$$

结合(1)，(8)，(9)式得 $h_{(-\Delta_\varphi^\tau K)}(u)=h_{\Delta_\varphi^\tau(-K)}(u)$，$\forall\, u\in S^{n-1}$，即(7)式右端等式。 证毕

定理 3 设 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$\tau\in[-1,1]$，$\varphi\in C_1$，且满足 $\varphi(1)=1$。则：

1) 当 K 不是原点对称的凸体时，$\Delta_\varphi^\tau K\in\mathcal{K}_s^n$ 当且仅当 $\tau=0$；

2) 当 $\tau\neq 0$ 时，$\Delta_\varphi^\tau K\in\mathcal{K}_s^n$ 当且仅当 $K\in\mathcal{K}_s^n$。

证明 1) 若 $\tau=0$，则 $\Delta_\varphi^0 K=\Delta_\varphi K\in\mathcal{K}_s^n$。另一方面，假设 $\Delta_\varphi^\tau K\in\mathcal{K}_s^n$，即 $\Delta_\varphi^\tau K=-\Delta_\varphi^\tau K$。根据(4)，(5)式和

$h_K(u)\neq h_{(-K)}(u)$(因为 K 不是原点对称的凸体),可得:

$$1=f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^{-\tau}K}(u)}\right)+f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_{(-K)}(u)}{h_{\Delta_\varphi^{-\tau}K}(u)}\right)=f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)}\right)+f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_{(-K)}(u)}{h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)}\right)。\tag{10}$$

由(4),(10)式可得:

$$2=\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)}\right)+\varphi\left(\frac{h_{(-K)}(u)}{h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)}\right)。\tag{11}$$

比较(4)式和(11)式,可得 $\Delta_\varphi^\tau K=\Delta_\varphi K\in K_s^n$。因为 φ 是严格递增函数,所以 $f_1(\tau)=f_2(\tau)=\frac{1}{2}$ 当且仅当 $\tau=0$。

2) 因为 K 是原点对称的凸体,所以 $h_{(-K)}(u)=h_K(u)$, $\forall u\in S^{n-1}$。根据可得 $1=\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)}\right)$。由于 φ 是严格递增函数且 $\varphi(1)=1$,因此 $h_K(u)=h_{\Delta_\varphi^{\tau}K}(u)$, $\forall u\in S^{n-1}$。故 $\Delta_\varphi^\tau K=K\in K_s^n$。另一方面,假设 K 不是原点对称的凸体且 $\tau\neq0$。结论 1)说明 $\Delta_\varphi^\tau K\notin K_s^n$。 证毕

在定理 3 结论 2)的证明中,可得到如下推论。

推论 1 设 $K\in K_s^n$, $\tau\in[-1,1]$, $\varphi\in C_1$,且满足 $\varphi(1)=1$,则 $\Delta_\varphi^\tau K=K$。

参考文献:

[1] Bianchini M,Colesanti A. A sharp Rogers and Shephard inequality for the p-difference body of planar convex bodies[J]. Proc Ame Math Soc,2008,136(7):2575-2582.

[2] Chakerian G. Inequalitied for the difference body of a convex body[J]. Proc Amer Math Soc,1967,18(5):879- 884.

[3] Haberl C,Schuster F. General L_p affine isoperimetric inequality[J]. J Differ Geom,2009,257(3):641-658.

[4] Lutwak E. The Brunn Minkowski-Firey theory I: mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differ Geom,1993,38:131-150.

[5] Jin H,Yuang S. A sharp Rogers Shephard type inequality for Orlicz-difference body of planar convex bodies[J]. Proc Indian Acad Sci,2014,124(4):573-580.

[6] Rogers C,Shephard G. The difference body of a convex body[J]. Arch Math (Basel),1957,8:220-233.

[7] Gardner R,Hug D,Weil W. The Orlicz Brunn Minkowski Theory:a general framework,additions,and inequality[J]. J Differ Geom,2014,97:427-476.

[8] Wang W,Ma T. Asymmetric L_p difference bodies[J]. Proc Amer Math Soc,2014,142:2517-2527.

The Basic Properties of Orlicz Difference Bodies

XIA Luoyan[1], BAI Shikun[2], ZENG Chunna[2]

(1. Department of Mathematics, Chongqing College of Humanities, Science & Technology, Chongqing 401524;

2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: We investigate the difference body of convex bodies in space and study further on their basical properties. Motived by the L_p difference body introduced by Lutwak and the definition of Orlicz addition, we generate the L_p difference body to its Orlicz case and give the definition of the symmetric Orlicz difference bodies as well as the asymmetric Orlicz difference bodies based on the Orlicz addition. Then we obtain some basic properties of the symmetric Orlicz difference bodies and the asymmetric Orlicz difference bodies by the properties of support function.

Key words: the Orlicz difference bodies; Orlicz combination; convex bodies

(责任编辑 黄 颖)