DOI:10.11721/cqnuj20160531

关于 T^* 拓扑空间的等价性及其性质的研究*

但建军, 金渝光
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:在已有文献的基础上讨论了 T^* 拓扑空间,首先讨论了 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$ 的关系:证明 $T^*\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}$,并举出反例说明其逆不一定成立。接着给出了 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$ 等价的一个充要条件,即若拓扑空间(X,τ)满足第一可数公理,则 X 是 T^* 空间当且仅当 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$ 空间。最后进一步讨论了 T^* 拓扑空间的若干性质,即遗传性、拓扑不变性、但不满足有限乘积性。

关键词:拓扑空间;T^* 拓扑空间;第一可数性公理

中图分类号:O19 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2016)05-0085-04

对于拓扑空间,一些分离性公理已被熟知,如 T_0,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5 等分离性空间。文献[1-3]给出了 $T_{2\frac{1}{2}}$ 和 $T_{2\frac{3}{4}}$空间,并讨论了它们的若干性质,给出了各种分离空间的关系。在文献[4]中提出了一种新的分离性公理 T^*,证明了它比 T_1 强而比 T_2 弱,即 $T_2\Rightarrow T^*\Rightarrow T_1$,反之不成立,也讨论了 T^* 拓扑空间的某些性质。文献[6]中以"序列极限唯一性"引进 $T_{1\frac{1}{2}}$公理即定义了 $T_{1\frac{1}{2}}$空间,证明了 $T_2\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}\Rightarrow T_1$,但反之不成立。受文献[4,6]的启示:$T^*$ 与 $T_{1\frac{1}{2}}$都介于 T_1,T_2 之间,本文讨论了 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$的关系:证明 $T^*\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}$,并举出反例说明,其逆不一定成立。接着给出了 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$等价的一个充要条件。最后进一步讨论了 T^* 拓扑空间的一些性质,像遗传性、拓扑不变性、但不满足有限乘积性。本文用 $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集。

1 预备知识

定义 1[4] 拓扑空间(X,τ)叫做 T^* 空间,是 X 指的一切紧子集都是闭的。若 D 表示 X 的所有紧集构成的集族,F 表示 X 的所有闭集构成的集族,那么空间(X,τ)是 T^* 的,即是指满足条件 $D\subset F$。

定义 2[5] 设 X 是一个拓扑空间,如果 $x,y\in X,x\neq y$,则点 x 有一个开邻域 U 使得 $y\notin U$,则称拓扑空间 X 是 T_1 空间。

定义 3[5] 设 X 是一个拓扑空间,如果 $x,y\in X,x\neq y$,则点 x 有一个开邻域 U,点 y 有一个开邻域 V,使得 $U\cap V=\varnothing$,则称拓扑空间 X 是 T_2 空间。

定义 4[5] 一个拓扑空间如果在它的每一点处有一个可数邻域基,则称这个空间满足第一可数性公理。

定义 5[1,6,8] 设 X 是一个拓扑空间,若 X 中任何一个收敛序列极限唯一,则称 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$空间。

定义 6[5] 设$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$是拓扑空间 X 中的一个序列,$x\in X$。如果对于 x 的每一个邻域 U,存在 $M\in\mathbf{Z}^+$ 使得当 $i>M$ 时有 $x_i\in U$,则称点 x 是序列$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$的一个极限点,也称为序列$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$收敛于 x,记作$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$。

定义 7[5] 设 X 是一个非紧拓扑空间,令 $X^*=X\cup\{\infty\}$,其中∞为任何一个不属于 X 的元素,$\tau^*=\tau\cup\tau_1\cup\{X^*\}$,$\tau_1=\{E\subset X^*\mid X^*-E$ 是拓扑空间(X,τ)中的一个闭紧子集$\}$,则称(X^*,τ^*)为拓扑空间(X,τ)的单点紧化,显然 $X\subset X^*$。

2 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$ 关系

引理 1 拓扑空间 X 中的收敛序列的项集与其任何一个极限的并集是 X 的紧子集。

---

* **收稿日期:**2015-05-27 **修回日期:**2016-04-26 **网络出版时间:**2016-07-13 14:00

资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);2013 年重庆市研究生教育教学研究项目(No. YJG133037);2013 年重庆高校创新团队建设计划(No. KJPB201308)

作者简介:但建军,男,研究方向为拓扑动力系统,E-mail:djjhero@126.com;**通信作者:**金渝光,教授,E-mail:tsgjyg@aliyun.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1400.006.html

证明 设$\{x_n\}$是X中的一个收敛序列,x是它的一个极限,记$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$,$B=A\cup\{x\}$,设$U$是$B$的任一开覆盖,根据拓扑空间中序列极限的定义,其中必定存在x的一个开邻域$u_0\subset U$和$k\in\mathbf{Z}^+$,使得当$n>k$时,$x_n\in u_0$。又因为单点集$\{x_i\}$是x_i的开邻域,$i=1,2,\cdots,k$,则$\{u_0,\{x_1\},\cdots,\{x_k\}\}$为$B$的有限子覆盖,故$B$是$X$的紧子集。 证毕

引理2[4] 拓扑空间(X,τ)为T^*空间的充要条件是对于任意两个不相交的紧子集A和B,存在集A的邻域U和B不相交、集B的邻域V和A不相交。

定理1 T^*与$T_{1\frac{1}{2}}$的关系,$T^*\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}$。

证明 假设空间X存在收敛序列$\{x_n\}$,极限不唯一,并且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y$,其中$x\neq y$,记$A=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}-\{y\})\cup\{x\}$,由引理1可得,$A$是$X$的紧子集。由于单点集$\{y\}$是$X$的紧子集,而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y$,根据序列极限的定义,$y$的任何邻域都包含$A$中的点,这与引理2矛盾,故$T^*\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}$。 证毕

推论1 $T_2\Rightarrow T^*\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}\Rightarrow T_1$。

注 下面举例说明定理1的逆不一定成立,为此,首先给出引理3及例1。

引理3 若X是T^*拓扑空间,则X^*是$T_{1\frac{1}{2}}$空间。

证明 设$\{x_n\}$是X^*中的一个收敛序列,它可能只收敛于X中的点;也只可能收敛于点∞;还可能既收敛于X中的点又收敛点∞,则下面讨论这3种情况。

1)当X^*中一个收敛序列$\{x_n\}$只收敛于X中的点时,假设X^*不是$T_{1\frac{1}{2}}$空间,若$\{x_n\}$在X^*中收敛于$x,y\in X$,其中$x\neq y$,根据序列收敛的定义,易知$\{x_n\}$在X中收敛于x,y。由于X是T^*空间,由定理1知,X也是$T_{1\frac{1}{2}}$空间,因此X^*中的收敛序列$\{x_n\}$极限唯一,矛盾,故X^*是$T_{1\frac{1}{2}}$空间。

2)当X^*中一个收敛序列$\{x_n\}$只收敛于点$\infty\in X^*$时,序列$\{x_n\}$的极限唯一是显然的。

3)当X^*中一个收敛序列$\{x_n\}$既收敛于X中的点又收敛点∞时,以下证明若$\{x_n\}$收敛于$x\in X$,则$\{x_n\}$不可能又收敛于$\infty\in X^*$。

令$A=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\})\cup\{x\}$,由引理1可知,$A$是$X$中的紧子集。因为$X$是$T^*$空间,所以$A$是$X$中的闭集,所以$X^*-A$是点$\infty$的开集,故存在点$\infty$的邻域$u\subset X^*-A$,使其不包含$\{x_n\}$中的任何点,这说明$\infty$不是$\{x_n\}$的极限,因此$(X^*,\tau^*)$中的收敛序列极限唯一,即$X^*$是$T_{1\frac{1}{2}}$空间。 证毕

例1 设X是不可数集,$\tau=\{U\mid U\subset X,U^c=X-U$是$X$的有限子集$\}\cup\{\varnothing\}$,则$X$是$T^*$空间,但非$T_2$空间,理由如下。

假设空间X中的紧子集是无限集,不妨设紧子集$A\subset X$是一个无限集,则从A中可取出互不相同的可数多个点$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$组成集合$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$,令$V_n=(X-B)\cup\{x_n\}$所得的邻域族$\{V_n\}$就是$A$的一个覆盖,但不是有限的,故$A$是非紧的,矛盾,所以空间$X$中的紧集仅可能是有限集,而有限集在$(X,\tau)$中是闭的,故$X$是$T^*$空间。然而$X$非$T_2$空间,这是因为在$X$中每一个非空开集都是$X$中的有限子集的补集,而$X$又是一个不可数集,由此易见$X$必然不是$T_2$空间。

下面举例说明定理1的逆定理不一定成立。

例2 "有限补"的单点紧化。

设X是不可数集,$X^*=X\cup\{\infty\}$,$\tau^*=\tau\cup\tau_1\cup\{X^*\}$,$\tau_1=\{E\subset X^*\mid X^*-E$是拓扑空间$(X,\tau)$中的一个闭紧子集$\}$,则由引理3及例1可得$(X^*,\tau^*)$是$T_{1\frac{1}{2}}$空间。但$(X^*,\tau^*)$不是$T^*$空间,理由如下。

取A是X的一个不可数真子集,设U是$A\cup\{\infty\}$的任一开覆盖,其中必存在包含点∞的一个邻域,设为u_∞,则不属于u_∞的X中的点只能为有限个(由于$X-u_\infty$必须是X的闭的紧子集,而X中的紧子集仅是有限集(例1),当然X中的有限集也是闭集),所以U存在有限子覆盖,即$A\cup\{\infty\}$是X^*的紧子集。但$A\cup\{\infty\}$不是X^*中闭子集,因为若$A\cup\{\infty\}$是X^*的闭子集,则$X^*-A\cup\{\infty\}=X-A$是X^*中开集,也是X中开集,取$x\notin A$,即$x\in X-A$,则$X-A$包含x的一个邻域C,$C\subset X-A$,所以$A=X-(X-A)\subset X-C$,而$X-C$为有限集,故A为有限集,与假设矛盾,故A不是闭子集。所以(X^*,τ^*)不是T^*空间。从而定理1的逆定理不一定成立。

3 T^* 与 $T_{1\frac{1}{2}}$ 等价的一个充要条件

引理 4[4]　若拓扑空间(X,τ)满足第一可数公理，则 X 是 T^* 空间当且仅当 X 是 T_2 空间。

定理 2　若 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$空间且满足第一可数公理，则 X 是 T_2 空间。

证明　假设 X 不是 T_2 空间，则存在 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，使得 $\forall u\in u_x, v\in v_y, u\cap v\neq\varnothing$，(其中 u_x, v_y 分别是 x,y 的邻域系)。因为 X 满足第一可数公理，则 $\exists x$ 的一个可数邻域基 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，使得 $\forall n\in\mathbf{Z}^+, u_{n+1}\subset u_n$，且有 y 的一个可数领域基 $v_1,v_2,\cdots,v_n,\cdots$，使得 $\forall n\in\mathbf{Z}^+, v_{n+1}\subset v_n$，对每一个 $n\in\mathbf{Z}^+$，可取一点 $x_n\in u_n\cap v_n$，显然$\{x_n\}$既收敛于 x，也收敛于 y，这与 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$空间矛盾，故 X 是 T_2 空间。　证毕

推论 2　若拓扑空间(X,τ)满足第一可数公理，则 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$空间当且仅当 X 是 T_2 空间。

定理 3　若拓扑空间(X,τ)满足第一可数公理，则 X 是 T^* 空间当且仅当 X 是 $T_{1\frac{1}{2}}$空间。

定理 3 由引理 4 及推论 2 可证。

4 T^* 空间的性质

引理 5　设 X,Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是同胚映射，如果 A 是 Y 的一个紧子集，则 $f^{-1}(A)$是 X 的紧子集。

证明　设 U 是 $f^{-1}(A)$的一个覆盖，它由 X 中的开集组成，对于每一个 $u\in U$，由 f 是同胚映射，则 $f(u)=(f^{-1})^{-1}(u)$是 Y 中的一个开集，由 $f^{-1}(A)\subset\bigcup\limits_{u\in U}u$，故$\bigcup\limits_{u\in U}f(u)=f(\bigcup\limits_{u\in U}u)\supset f(f^{-1}(A))\supset A$，所以 $B=\{f(u)\mid u\in U\}$是 A 的一个开覆盖，由于 A 是 Y 的一个紧子集，所以 B 有一个有限子族，设为$\{f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_n)\}$且覆盖 A，由于 $f(u_1)\cup f(u_2)\cup\cdots\cup f(u_n)=f(u_1\cup u_2\cup\cdots\cup u_n)\supset A$，所以 $f^{-1}(f(u_1\cup u_2\cup\cdots\cup u_n))\supset f^{-1}(A)$，因此，$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$是 U 的一个子族且覆盖 $f^{-1}(A)$，故 $f^{-1}(A)$是 X 的紧子集。　证毕

定理 4　T^* 拓扑空间是可遗传的。

证明　设(X,τ)是 T^* 拓扑空间，A 是 X 的子空间，对任意紧子集 $B\subset A\subset X$，由于 X 是 T^* 空间，故紧子集 B 是闭集，因此，T^* 拓扑空间是可遗传的。　证毕

定理 5　T^* 空间是拓扑不变的，即 X,Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是同胚映射，若 X 是 T^* 空间，则 Y 也是 T^* 空间。

证明　假设紧子集 $A\subset Y$ 是开集，由于 f 是同胚映射，所以，$f^{-1}(A)$是 X 的开集，由引理 5 可得，$f^{-1}(A)$是紧子集。又由于 X 是 T^* 空间，故 $f^{-1}(A)$是闭子集，矛盾，故 A 是闭集，则 Y 也是 T^* 空间。　证毕

乘积性在拓扑空间中也是讨论的热点，因此有必要讨论 T^* 空间的乘积性，但两个 T^* 空间的积空间未必是 T^* 空间。首先给出一个引理，接着举出一个反例。

引理 6　设 X 是 T^* 空间，若 $X\times X$ 是 T^* 空间，则 X 的任何紧子集是 T_2 的。

证明　设 $A\subset X$ 的紧子集，则 $\Delta_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$与 A 同胚，因此 Δ_A 是 $X\times X$ 的紧子集，由于 $X\times X$ 是 T^* 空间，故 Δ_A 是 $X\times X$ 中的闭子集，则$(x,y)\in A\times A-\Delta_A$ 有一邻域 C 使 $C\cap\Delta_A=\varnothing$，由积空间拓扑的定义，依次由 x,y 的邻域 u 及 v，使 $u\cap v\subset C$，故$(u\cap v)\cap\Delta_A=\varnothing$，即 $u\cap v=\varnothing$，故 A 是 T_2 的。　证毕

例 3　令 $Q^*=Q\cup\{\infty\}$为有理数 Q 的一点紧化，即 Q^* 的拓扑 $\tau^*=\tau\cup\{U\subset Q^*\mid\infty\in U$ 且 $Q\backslash U$ 是(Q,τ) 中的闭紧子集$\}$，其中 τ 是空间 Q 上的拓扑，由文献[7]可知，Q^* 为 T^* 空间但不是 T_2 的，而 Q^* 是 T^* 空间，由引理 6 得，$Q^*\times Q^*$ 不是 T^* 空间。

参考文献：

[1] 阿吉木・优力达西. 收敛序列极限唯一的拓扑空间[J]. 江南大学学报：自然科学版，2010(6)：746-749.
Yoldax A J M. The topological space of the limit of convergence sequence[J]. Journal of Jiangnan University：Natural Science Edition，2010(6)：746-749.

[2] 吴亭. 关于分离公理的 $T_{2\frac{1}{2}}$ 公理及 $T_{2\frac{1}{2}}$ 空间的性质[J]. 宁德师专学报，2000(4)：246-247.
Wu T. $T_{2\frac{1}{2}}$ Axiom about separable property and properties of $T_{2\frac{1}{2}}$ space[J]. Journal of Ningde Teachers College，2000(4)：246-247.

[3] 杜瑞瑾. 介于 $T_{2\frac{1}{2}}$ 与 T_3 空间之间的拓扑空间[J]. 河南大学学报：自然科学版，2007(1)：11-13.
Du R J. The topological space situated between $T_{2\frac{1}{2}}$ and T_3[J]. Journal of Henan University：Natural Science Edition，2007(1)：11-13.

[4] 戴锦生. T^* 拓扑空间[J]. 西北大学学报：自然科学版，1980

(3):6-11.
Dai J S. T^* topological space[J]. Journal of Northwestern University: Natural Science Edition, 1980(3):6-11.
[5] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京:高等教育出版社, 2011.
Xiong J C. Point set topology handouts[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
[6] 郭驼英. $T_{1\frac{1}{2}}$ 空间[J]. 华中师范大学学报:自然科学版, 1982(1):61-65.
Guo T Y. $T_{1\frac{1}{2}}$ space[J]. Journal of Huazhong Normal University: Natural Science Edition, 1982(1):61-65.
[7] Wilansky A. Between T_1 and T_2[J]. Amer Math Monthly, 1967, 74(3):261-266.
[8] 孙克宽, 郭驼英. 拓扑学[M]. 武汉:华中师范大学出版社, 2002.
Sun K K, Guo T Y. Topology[M]. Wuhan: Huazhong Normal University Press, 2002.

On the Equivalence of T^* Topological Space and Its Related Properties

DAN Jianjun, JIN Yuguang
(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: On the basis of the existing literature, T^* topological space is discussed. First, the relationship between T^* and $T_{1\frac{1}{2}}$ is discussed: $T^* \Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}$, and a counter example shows that inverse is not established. Then gives a sufficient and necessary condition of T^* to $T_{1\frac{1}{2}}$ equivalent, namely, if the topological space (X,τ) satisfies the first axiom of countability, X is T^* space if and only if X is $T_{1\frac{1}{2}}$ space. Finally, the properties of T^* to pological spaces are further studied, namely, hereditary properties, topological invariance, but it does not satisfy the finite multiplicative property.

Key words: topology space; T^* topological space; the first axiom of countability

(责任编辑 黄 颖)