2016 年 11 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Nov. 2016
第 33 卷 第 6 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 33 No. 6

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160622

向量优化中广义内部的一些注记*

张万里[1], 夏远梅[2], 赵克全[2]

(1. 西南大学 电子信息工程学院, 重庆 400715; 2. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:在向量优化中,基于拓扑内部的集合的许多性质具有十分重要的作用,然而在无限维空间中存在许多拓扑内部为空的集合。因此,研究广义内部下集合的一些相应的性质特征则显得十分必要。首先归纳了向量优化中拓扑内部意义下集合的一些经典结果,进而通过一些具体的例子研究了这些经典结果在拟内部等广义内部意义下的情形。

关键词:向量优化;拓扑内部;拟内部;相对代数内部

中图分类号:O221.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2016)06-0001-04

1 预备知识

基于拓扑内部意义下集合的一些经典性质在最优化理论及其应用研究中扮演了十分基础且重要的作用[1-2]。特别地,Tanaka 和 Kuroiwa 在文献[3]中研究了凸集的一些基本的拓扑性质和代数性质,并在文献[4-5]中进一步推广和改进了相应的结果。然而,在一些无限维空间中存在很多集合的拓扑内部为空的情况。为了在更广泛的意义下研究各类优化问题,一些学者相继提出了各种广义内部的概念。特别地,Borwein 和 Goebel 在文献[6]中提出了伪相对内部、拟内部和拟相对内部等概念,研究了这些广义内部的一些基本性质,提出了一些关于拟相对内部的公开问题。最近,Zălinescu 在文献[7]中进一步研究了这些公开问题。各类广义内部及其相应的一些基本性质在向量优化理论与方法研究中也有十分广泛的应用。特别地,Bao 和 Mordukhovich[8]提出了广义内部意义下向量优化问题的一些解概念,并利用变分分析等工具研究了这些解的一些性质及其存在性结果。本文主要是基于拓扑内部非空情况下集合的经典结果,研究其在拟内部等广义内部意义下的相应情形。本文的主要结果对于进一步探讨广义内部意义下向量优化问题解的一些性质具有重要意义。

下面首先介绍本文需要用到的一些基本概念与引理。

若无特殊说明,本文假定 Y 为实局部凸拓扑线性空间,Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间。$\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间。对于 Y 中的非空子集 A,$\mathrm{cl}A$ 和 $\mathrm{int}A$ 分别表示集合 A 的拓扑闭包和拓扑内部。集合 A 的锥包和线性包分别定义为

$$\mathrm{cone}A=\{\lambda a\mid a\in A,\lambda\geqslant 0\},\ \mathrm{span}A=\Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\mid a_i\in A,\lambda_i\in\mathbf{R}^1\Big\}。$$

称锥 $K\subseteq Y$ 为点的,若 $K\cap(-K)=\{0\}$。

设 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 为 p 次收敛实数列全体,对于 $y=(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^p$,其范数定义为 $\|y\|=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}y_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}$,其中 $\mathbf{N}^+$ 为正整数集。众所周知,l^p 为一实 Banach 空间。l^p 中的正锥和严格正锥分别为:

$$l_+^p=\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^p\mid y_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbf{N}^+\},\ l_{++}^p=\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^p\mid y_n>0,\forall n\in\mathbf{N}^+\}。$$

---

* **收稿日期:**2015-01-03　**修回日期:**2016-10-13　**网络出版时间:**2016-11-02 13:25

资助项目:国家自然科学基金(No. 11671062;No. 11271391);第二批重庆市高等学校青年骨干教师资助计划;重庆市教委科学技术项目(No. KJ1500303);重庆市基础与前沿研究计划项目(No. cstc2015jcyjA00027)

作者简介:张万里,男,博士研究生,研究方向为向量优化理论与方法,E-mail:mathwlzhang@163.com;**通信作者:**赵克全,副教授,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1325.016.html

引理 1[2] 设 $A\subseteq Y$ 为非空凸集,若 $\overline{y}\notin \mathrm{cl}A$,则存在 $\mu^*\in Y^*\setminus\{0\}$ 和实数 λ,使得 $\langle\mu^*,y\rangle\leqslant\lambda<\langle\mu^*,\overline{y}\rangle$, $\forall\, y\in A$。其中 $\langle\mu^*,y\rangle$ 表示线性泛函 μ^* 作用在 y 上的值。

定义 1[6] 设非空凸集 $A\subseteq Y$,A 的拟内部定义为 $\mathrm{qi}A=\{y\in A\mid \mathrm{clcone}(A-y)=Y\}$。

定义 2[9] 设 Y 为实线性空间,$A\subseteq Y$ 为非空子集,A 的向量闭包定义为:

$$\mathrm{vcl}A=\{y\in Y\mid \exists\, h\in Y,\forall\,\lambda>0,\exists\, t\in(0,\lambda],y+th\in A\}。$$

定义 3[9] 设 Y 为实线性空间,$A\subseteq Y$ 为非空子集,A 的相对代数内部定义为:

$$\mathrm{icr}A=\{y\in A\mid \forall\, h\in \mathrm{span}(A-A),\exists\,\lambda>0,\forall\, t\in[0,\lambda],y+th\in A\}。$$

2 基于广义内部的集合性质

众所周知,下面的基于拓扑内部意义下集合的性质在凸分析中是非常基本且重要的。

C1[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)=\mathrm{cl}A$;

C2[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{int}A))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}A)$;

C3[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\mathrm{int}(\lambda A)=\lambda\mathrm{int}A$, $\forall\,\lambda\in\mathbf{R}^1$;

C4[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\mathrm{int}(A-y)=\mathrm{int}A-y$, $y\in Y$;

C5[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\lambda\mathrm{int}A+(1-\lambda)\mathrm{cl}A\subseteq\mathrm{int}A$, $\forall\,\lambda\in(0,1]$;

C6[11] 设 $K\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸锥且 $A\subseteq Y$,则 $\mathrm{cl}(A+K)=\mathrm{cl}(A+\mathrm{int}K)$;

C7[1-2] 设 $A\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸集,则 $\mathrm{int}A=\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$;

C8[11] 设 $K\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸锥,$A\subseteq Y$,则 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A+K))=A+\mathrm{int}K$;

C9[3-4] 设 $A,B\subseteq Y$ 为非空凸集且 B 的拓扑内部非空,则 $\mathrm{int}(A+B)=A+\mathrm{int}B=\mathrm{cl}A+\mathrm{int}B$;

C10[12] 设 $K\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸锥,$A\subseteq Y$ 且 $(A+K)\cap(-\mathrm{int}K)=\varnothing$,则

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K))\cap(-\mathrm{int}K)=\varnothing。$$

下面主要讨论以上这些拓扑内部意义下的基本结果在拟内部等广义内部下的相应情形。

定理 1 设 $A\subseteq Y$ 为拟内部非空的凸集,则:1) $\mathrm{cl}(\mathrm{qi}A)=\mathrm{cl}A$;2) $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{qi}A))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}A)$;3) $\mathrm{qi}(\lambda A)=\alpha\mathrm{qi}A$, $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}^1$;4) $\mathrm{qi}(A-y)=\mathrm{qi}A-y$, $y\in Y$;5) $\lambda\mathrm{qi}A+(1-\lambda)\mathrm{cl}A\subseteq\mathrm{qi}A$, $\forall\,\lambda\in(0,1]$。

证明 由 Boţ 等人在文献[10]中的命题 2.5 知,当 $\mathrm{qi}A\neq\varnothing$ 时,结论显然成立。 证毕

定理 2 设 $K\subseteq Y$ 为拟内部非空的凸锥,$A\subseteq Y$,则 $\mathrm{cl}(A+K)=\mathrm{cl}(A+\mathrm{qi}K)$。

证明 结合定理 1 的结论 1)可得

$$A+K\subseteq\mathrm{cl}A+\mathrm{cl}K=\mathrm{cl}A+\mathrm{cl}(\mathrm{qi}K)\subseteq\mathrm{cl}(A+\mathrm{qi}K)。$$

于是 $\mathrm{cl}(A+K)\subseteq\mathrm{cl}(A+\mathrm{qi}K)$。此外,$\mathrm{cl}(A+\mathrm{qi}K)\subseteq\mathrm{cl}(A+K)$ 显然成立。结论得证。 证毕

定理 3 设 $A\subseteq Y$ 为拟内部非空的凸集,则 $\mathrm{qi}A\subseteq\mathrm{qi}(\mathrm{cl}A)$。

由拟内部的定义,定理 3 的结论显然成立。

注 1 定理 3 中的反包含关系不一定成立。

例 1 令 $Y=l^2$,$A=l_+^1$,$\overline{y}=\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^2$。显然 $l_+^1\subseteq l_+^2$ 且 A 为凸集。因 l_+^2 为闭凸锥,则 $\mathrm{cl}l_+^1\subseteq l_+^2$。若存在 $\overline{y}\in l_+^2$,$\overline{y}\notin\mathrm{cl}l_1^+$。根据引理 1 得,存在 $\mu^*\in Y^*\setminus\{0\}=l^2\setminus\{0\}$ 和实数 λ,使得 $\langle\mu^*,y\rangle\leqslant\lambda<\langle\mu^*,\overline{y}\rangle$, $\forall\, y\in\mathrm{cl}l_+^1$。不妨设 $\overline{y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\overline{y}_3,\cdots)$,$\mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*,\cdots)$,其中 $\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*,\cdots$ 不全为零。

令 $y=0$ 可得 $\lambda\geqslant0$。令 $k>0$,$y=(k,0,0,\cdots)$,则 $k\mu_1^*=\langle\mu^*,y\rangle\leqslant\lambda$。故 $\mu_1^*\leqslant0$。否则,当 k 足够大时将导致矛盾。类似可得 $\mu_2^*\leqslant0$,$i=1,2,\cdots$。因此 $0\leqslant\lambda<\langle\mu^*,\overline{y}\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_i^*\ \overline{y}_i\leqslant0$ 产生矛盾。故有 $\mathrm{cl}A=l_+^2$。于是 $\mathrm{qi}(\mathrm{cl}A)=\mathrm{qi}l_+^2$。因此

$$\mathrm{qi}A=\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^1\mid y_n>0,\forall\, n\in\mathbf{N}^+\},\mathrm{qi}(\mathrm{cl}A)=\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^2\mid x_n>0,\forall\, n\in\mathbf{N}^+\},$$

显然 $\overline{y}\in\mathrm{qi}(\mathrm{cl}A)$,但 $\overline{y}\notin\mathrm{qi}A$。

定理 4 设 $K\subseteq Y$ 为拓扑内部非空的凸锥且 $A\subseteq Y$,则 $A+\mathrm{qi}K\subseteq\mathrm{qi}(\mathrm{cl}(A+K))$。

证明　对任意的 $y\in A+\mathrm{qi}K$，存在 $a\in A$，$k\in\mathrm{qi}K$ 使得 $y=a+k$。于是由 $k\in\mathrm{qi}K$ 及拟内部的定义可知 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(K-k))=Y$。根据文献[12]中的命题 3.1 得：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{cl}(A+K)-y))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{cl}(A+K-y)))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{cl}(A+K-a-k)))\supseteq$$
$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{cl}(K-k)))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(K-k))=Y。$$

此外，显然有 $y\in\mathrm{cl}(A+K)$。于是由拟内部的定义得 $y\in\mathrm{qi}(\mathrm{cl}(A+K))$。结论得证。　　证毕

注 2　定理 4 中的反包含关系不一定成立。

例 2　令 $Y=l^2$，$A=K=l^1_+$。显然，K 是 Y 中的凸锥。由例 1 可知

$$\mathrm{qi}(\mathrm{cl}(A+K))=\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^2\mid y_n>0,\forall n\in\mathbf{N}^+\}\not\subseteq\{(y_n)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^1\mid y_n>0,\forall n\in\mathbf{N}^+\}=A+\mathrm{qi}K。$$

定理 5　设 $A,B\subseteq Y$ 为非空凸集且 B 的拟内部非空，则 $A+\mathrm{qi}B\subseteq\mathrm{qi}(A+B)$。

由文献[7]的命题 1 可知定理 5 的结论显然成立。

注 3　定理 5 中的反包含关系不一定成立。

例 3　令 $Y=l^2$，$A=[0,1]\bar{y}\subseteq l^2$，$B=l^1_+$，$\bar{y}=\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbf{N}^+}\in l^2$。显然，$l^1_+\subseteq A+B\subseteq l^2_++l^2_+=l^2_+$。故由例 1 可知 $\mathrm{cl}(A+B)=l^2_+$。因此，$\bar{y}\in(A+B)\cap\mathrm{qi}l^2_+$。于是由拟内部的定义可知 $\bar{y}\in\mathrm{qi}(A+B)$。

假设 $\bar{y}\in A+\mathrm{qi}B$，则存在 $t\in[0,1]$ 使得 $\bar{y}\in t\bar{y}+\mathrm{qi}B\subseteq t\bar{y}+l^1$。因此有 $(1-t)\bar{y}\in l^1$。由 $\bar{y}\notin l^1$ 得 $t=1$，于是 $0\in\mathrm{qi}B$，产生矛盾。因此，$\bar{y}\notin A+\mathrm{qi}B$。

定理 6　设 $A,B\subseteq Y$ 为非空凸集且 B 的拟内部非空，则 $A+\mathrm{qi}B\subseteq\mathrm{cl}A+\mathrm{qi}B$。

定理 6 的结论显然成立。

注 4　定理 6 中的反包含关系不一定成立。

例 4　令 $Y=l^2$，$A=B=l^1_+$，则有 $\mathrm{cl}A+\mathrm{qi}B=l^2_++l^1_{++}$，$A+\mathrm{qi}B=l^1_++l^1_{++}=l^1_{++}$。

取 $\bar{y}=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^+}+\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^+}$，可以验证 $\bar{y}\in\mathrm{cl}A+\mathrm{qi}B$，$\bar{y}\notin A+\mathrm{qi}B$。

注 5　上面的例 3 同时也表明 $\mathrm{qi}(A+B)\subseteq\mathrm{cl}A+\mathrm{qi}B$ 不一定成立。上面的例 4 同时也表明 $\mathrm{cl}A+\mathrm{qi}B\subseteq\mathrm{qi}(A+B)$ 不一定成立。

定理 7　设 Y 为实线性空间，$\{0\}\neq K\subseteq Y$ 为相对代数内部非空的凸锥且 K 是点的。如果

$$A\subseteq Y\text{ 且 }(A+K)\cap(-\mathrm{icr}K)=\varnothing,$$

则 $\mathrm{cone}(A+K)\cap(-\mathrm{icr}K)=\varnothing$。

证明　由 $\{0\}\neq K$ 及 K 的点性，很容易验证 $0\notin\mathrm{icr}K$。反设结论不成立，则存在 $a\in A$，$k\in K$ 和 $\lambda\geqslant 0$ 使得 $y=\lambda(a+k)\in-\mathrm{icr}K$。若 $\lambda=0$，则与 $0\notin\mathrm{icr}K$ 矛盾。若 $\lambda>0$，则 $a+k\in-\mathrm{icr}K$。这与假设条件矛盾。结论得证。
证毕

注 6　在定理 7 的条件下 $\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(A+K))\cap(-\mathrm{icr}K)=\varnothing$ 不一定成立。

例 5　令 $Y=\mathbf{R}^2$，$K=\{(y_1,y_2)\mid y_1=y_2,y_1\geqslant 0\}$，$A=\{(y_1,y_2)\mid y_1<0,y_2<y_1\}\cup\{(0,0)\}$。可以验证

$$A+K=\{(y_1,y_2)\mid y_2\leqslant y_1,0\leqslant y_1\}\cup A。$$

显然 $\mathrm{cone}(A+K)\cap(-\mathrm{icr}K)=\varnothing$。但 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K))\cap(-\mathrm{icr}K)=-\mathrm{icr}K\neq\varnothing$。

参考文献：

[1] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. NewJersey: Princeton University Press, 1972.

[2] 史树中. 凸分析[M]. 上海：上海科学技术出版社，1990.
Shi S Z. Convex analysis[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1990.

[3] Tanaka T, Kuroiwa D. The convexity of A and B assures int $A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Applied Mathematics Letters, 1993, 6(1): 83-86.

[4] Tanaka T, Kuroiwa D. Some general conditions assuring int $A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Applied Mathematics Letters, 1993, 6(31): 51-53.

[5] Tanaka T, Kuroiwa D. Anothe observation on conditions assuring int $A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Applied Mathematics Letters, 1994, 7(1): 19-22.

[6] Borwein J, Goebel R. Notions of relative interior in Banach spaces[J]. Journal of Mathematics Sciences, 2003, 115(4): 2542-2553.

[7] Zălinescu C. On three open problems related to quasi relative interior[J]. arXiv Preprint: 1406.2533, 2014.

[8] Bao T Q, Mordukhovich B S. Relative Pareto minimizers for multiobjective problems: existence and optimality conditions[J]. Mathematical Programming, 2010, 122(2): 301-347.

[9] Adan M, Novo V. Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone-convexlikeness [J]. European Journal of Operational Research, 2003, 149 (3): 641-653.

[10] Boţ R I, Csetnek E R, Wanka G. Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19(1): 217-233.

[11] Breckner W W, Kassay G. A systematization of convexity concepts for sets and functions[J]. Journal of Convex Analysis, 1997, 4(1): 109-128.

[12] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(2): 413-427.

Operations Research and Cybernetics

Remarks on Generalized Interior in Vector Optimization

ZHANG Wanli[1], XIA Yuanmei[2], ZHAO Kequan[2]

(1. College of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715;

2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Many characterizations via topological interior of sets have been playing an important role in vector optimization. However, there exist many sets with empty topological interior in infinite dimensional spaces. Hence, it is necessary to investigate the corresponding characterizations of sets in the sense of generalized interior. In this paper, we first summarize some classical results based on the topological interior in vector optimization. Furthermore, we investigate some corresponding cases in the sense of generalized interior such as quasi interior by means of some concrete examples.

Key words: vector optimization; topological interior; quasi interior; relative algebraic interior

(责任编辑　黄　颖)