运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160620

向量优化中改进集的一些拓扑性质*

吴海琴，刘学文
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:改进集是研究向量优化问题的一个十分重要的工具。首先证明了改进集的有关拓扑闭包和拓扑内部的一些性质。进一步,在改进集的条件下给出了拓扑向量空间中两个非空集合之和的拓扑内部与拓扑闭包的一些运算性质,并得到了它的一些等价刻画。最后给出了一些具体的例子对主要结果进行了解释。

关键词:向量优化;改进集;拓扑闭包;拓扑内部
中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)06-0005-03

向量优化问题研究需要利用一些基础的数学工具,如在目标空间偏导偏序关系的凸锥、集合的回收锥、凸集和非凸集的分离定理等。文献[2-3,5-8]对凸锥的基本性质及其在向量优化中的应用进行了研究。近年来对向量优化问题近似解的研究已成为热点研究方向之一,一些处理向量优化问题近似解的基本工具如改进集等相继被提出。改进集和 free-disposal 集有着密切的联系。1959 年,Debreu 在文献[1]中首次提出了 free-disposal 集的概念,并研究了它的一些应用。2011 年,Chicco 等人在文献[5]中给出了有限维空间中改进集的概念,而且获得了改进集的一些性质。2012 年,Gutiérrez 等人在文献[6]中研究了一般拓扑向量空间中改进集的一些新性质,并得到了它的等价刻画。其它一些研究结果见文献[2,6-8]等。

受文献[9-11]的启发,本文研究了向量优化中改进集拓扑内部和拓扑闭包的一些性质,并得到了它的一些等价刻画。同时也给出了一些具体例子对所得结果进行解释。

1 预备知识

本文设 Y 是拓扑向量空间,$\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧几里得空间,$\mathbf{R}^n_+$ 和 $\mathbf{R}^n_{++}$ 分别表示非负象限锥和正象限锥,A 是 Y 中的非空集合,$\mathrm{cl}A$,$\mathrm{int}A$ 分别表示 A 的拓扑闭包和拓扑内部。

下面首先给出一些基本概念和引理。

定义 1[1]　设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥,若非空集合 $E\subset Y$ 满足 $E+K=E$,则称 E 是关于 K 的 free-disposal 集。

定义 2[5]　设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥,若非空集合 $E\subset Y$ 满足 $0\notin E$ 且 $E+K=E$,则称 E 是关于 K 的改进集。

引理 1[2]　设 $A\subset Y$,$B\subset Y$ 是两个非空集合,若 $\mathrm{int}A\neq\varnothing$,则 $\mathrm{int}A+B\subset\mathrm{int}(A+B)$。

引理 2[2]　设 $A\subset Y$,$B\subset Y$ 是两个非空集合,若 $\mathrm{int}A\neq\varnothing$,$\mathrm{int}B\neq\varnothing$,则 $\mathrm{int}(A+B)=\mathrm{int}A+\mathrm{int}B$。

引理 3[6]　设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥,若 $E\subset Y$ 是关于 K 的改进集,则:1) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}E)=\mathrm{int}E$;2) $\mathrm{cl}E=\mathrm{cl}E+K$。

引理 4[3]　设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥。$E\subset Y$ 是非空集合,则:1) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E+K))=E+\mathrm{int}K$;2) $\mathrm{cl}(E+K)=\mathrm{cl}(E+\mathrm{int}K)$。

引理 5[7]　设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥。$E\subset Y$ 是非空集合,且 E 是关于 K 的改进集,则:1) $\mathrm{int}E=E+\mathrm{int}K$;2) $\mathrm{int}E=\mathrm{cl}E+\mathrm{int}K$;3) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+K$。

* **收稿日期**:2015-12-27　**修回日期**:2016-06-28　**网络出版时间**:2016-11-02 13:28
资助项目:国家自然科学基金(No. 11301574;No. 11271391)
作者简介:吴海琴,女,研究方向为向量优化理论,E-mail:haiqinwumath@163.com;**通信作者**:刘学文,教授,E-mail:xuewenliu@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1328.022.html

引理 6[9] 设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥。$E\subset Y$ 是非空集合,且 E 是关于 K 的改进集,则 $\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+\mathrm{int}K$。

2 改进集的拓扑性质

下面研究拓扑向量空间中改进集的拓扑性,基于熊金城的结果[4],给出改进集的一些拓扑内部和拓扑闭包性质。熊金城获得了下面结果[4]。

定理 1 设 Y 是一个拓扑空间,则对于任意 $E\subset Y$ 有:1) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E)$;2) $\mathrm{cl}E=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}E)$。

下面利用改进集给出定理 1 的结论成立的一个新的充分条件。

定理 2 设 Y 是一个拓扑空间,$K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥,$E\subset Y$ 为关于 K 的非空改进集,则:1) $\mathrm{int}(E)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E)$;2) $\mathrm{cl}E=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}E)$。

证明 1) 由于 E 是关于 K 的改进集,根据引理 5 的结论 3)可得 $\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+K$,从而 $\mathrm{int}E$ 是关于 K 的改进集,再由引理 3 的结论 1)可知:$\mathrm{int}(\mathrm{int}E)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}E))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E)=\mathrm{int}E$。

2) 由于 E 是关于 K 的改进集,根据引理 3 的结论 2)可知 $\mathrm{cl}E=\mathrm{cl}E+K$,从而 $\mathrm{cl}E$ 是关于 K 的 free-disposal 集,再由引理 4 的结论 2)和引理 5 的结论 2)有:

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}E)=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}E+K)=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}E+\mathrm{int}K)=\mathrm{cl}(\mathrm{int}E)=\mathrm{cl}E。$$

证毕

杜青香在文献[9]中给出了下面结果:1) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+\mathrm{int}K$,2) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E+K)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}K+E)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E+\mathrm{cl}K)$。在此基础上给出了一些关于改进集拓扑内部和拓扑闭包的一些等价刻画。

定理 3 设 $K\subset Y$ 是具有非空拓扑内部的凸锥,$E\subset Y$ 是非空集,若 E 是关于 K 的改进集,则:

$$\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K。$$

证明 因为 E 是关于 K 的改进集,所以根据引理 5 的结论 3)可得 $\mathrm{int}E=\mathrm{int}E+K\subset\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K$;又因为 K 是 Y 中具有非空内部的凸锥,所以 $\mathrm{cl}K$ 也是 Y 中具有非空拓扑内部的凸锥,再由引理 5 的结论 3)得

$$\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K=\mathrm{int}(E+\mathrm{cl}K)\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}E+\mathrm{cl}K)\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E+K))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E)=\mathrm{int}E,$$

故结论成立。 证毕

注 1 若 E 不是关于 K 的改进集,引理 6 和定理 3 不一定成立,下面例子可以说明这一点。

例 1 设 $Y=\mathbf{R}^2$,$K=\mathbf{R}^2_+$,且 $E=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,则:1) $\mathrm{int}E=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$,$\mathrm{int}K=\mathbf{R}^2_{++}$,进而 $\mathrm{int}E+\mathrm{int}K=\mathrm{int}K=\mathbf{R}^2_{++}$,显然 $\mathrm{int}E\neq\mathrm{int}E+\mathrm{int}K$;2) $\mathrm{int}E=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$,$\mathrm{cl}K=\mathbf{R}^2_+$,进而 $\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K=\mathbf{R}^2_+$,显然 $\mathrm{int}E\neq\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K$。

定理 4 设 $E\subset Y$ 是非空集,且 E 是关于 K 的改进集,则:1) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E+\mathrm{int}K)$;2) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E+K)$;3) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(E+\mathrm{int}K)$;4) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E+\mathrm{int}K)$;5) $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K)$。

证明 只需证明 1)和 5)即可,其余类似可得。

结论 1)的证明。因为 E 是关于 K 的改进集,所以由定理 2 的结论 1)和引理 6 可得 $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E+\mathrm{int}K)$。

结论 5)的证明。因为 E 是关于 K 的改进集,所以由定理 2 的结论 1)和定理 3 可得 $\mathrm{int}E=\mathrm{int}(\mathrm{int}E)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K)$。 证毕

注 2 若 E 不是关于 K 的改进集,定理 4 不一定成立,下面例子可以说明这一点。

例 2 令 $E=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}\setminus\{(0,0)\}K=\mathbf{R}^2_+$。显然 E 不是关于 K 的改进集。此外:

$$\mathrm{int}E=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1,x_1>0,x_2>0\}\setminus\{(0,0)\},\mathrm{int}K=\mathbf{R}^2_{++},\mathrm{cl}K=K,$$

$$\mathrm{int}E+\mathrm{int}K=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\},\mathrm{int}E+K=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\},$$

$$E+\mathrm{int}K=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\},\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\},$$

$$\mathrm{cl}E+\mathrm{int}K=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\}。$$

故显然 $\mathrm{int}E\subset\mathrm{int}E+\mathrm{int}K=\mathrm{int}E+K=E+\mathrm{int}K=\mathrm{int}E+\mathrm{cl}K=\mathrm{cl}E+\mathrm{int}K$,即定理 4 的结论 1)~5)不成立。

定理 5 设 $K_1\subset Y$ 和 $K_2\subset Y$ 是两个凸锥且 K_1,K_2 内部非空。若 $E_1\subset Y$,$E_2\subset Y$ 分别是关于 K_1,K_2 的改进集,则:1) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E_1+\mathrm{int}E_2)$;2) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E_1+E_2)$;3) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{int}E_1+\mathrm{cl}E_2)$;4) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(E_1+\mathrm{int}E_2)$;5) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(E_1+\mathrm{cl}E_2)$;6) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E_1+E_2)$;7) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E_1+\mathrm{int}E_2)$;8) $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}E_1+\mathrm{cl}E_2)$。

证明 只需证明结论 1)和结论 8)即可,其余类似可得。

结论 1)的证明。因为 E_1 是关于 K_1 的改进集,则 $E_1+K_1=E_1$,又因 E_2 是关于 K_2 的改进集,则 $E_2+K_2=E_2$,从而$(E_1+E_2)+(K_1+K_2)=E_1+E_2$。

根据引理 2 得 $\mathrm{int}(K_1+K_2)=\mathrm{int}K_1+\mathrm{int}K_2$,再根据定理 1 的结论 1)得 $\mathrm{int}(E_1+E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{int}(E_1+E_2))$,再结合引理 5 的结论 1)可得

$$\mathrm{int}(\mathrm{int}E_1+\mathrm{int}E_2)=\mathrm{int}(E_1+\mathrm{int}K_1+E_2+\mathrm{int}K_2)=\mathrm{int}((E_1+E_2)+(\mathrm{int}K_1+\mathrm{int}K_2))=\mathrm{int}(\mathrm{int}(E_1+E_2))=\mathrm{int}(E_1+E_2)。$$

结论 8)的证明。由题设可得 $E_1+K_1=E_1$,$E_2+K_2=E_2$,从而$(E_1+E_2)+(K_1+K_2)=E_1+E_2$,因此由引理 4 的结论 1)和引理 5 的结论 3)可得:

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}E_1+\mathrm{cl}E_2)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_1+K_1)+\mathrm{cl}(E_2+K_2))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_1+K_1))+\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_2+K_2))=E_1+\mathrm{int}K_1+E_2+\mathrm{int}K_2=(E_1+E_2)+\mathrm{int}(K_1+K_2)=\mathrm{int}(E_1+E_2)。$$ 证毕

注 3 改进集和 free-disposal 集具有紧密的联系,可以证明 free-disposal 集也有类似于本文的相关结论。

参考文献:

[1] Debreu G. Theory of value[M]. New York:John Wiley and Sons Inc,1959.

[2] Tanaka T,Kuroiwa D. The convexity of A and B assures $\mathrm{int}A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Apple Math Lett,1993,6(1):83.

[3] Breckner W W,Kassay G. A systematization of convexity concepts for sets and functions[J]. Convex Anal,1997,4(1):109.

[4] 熊金城.点集拓扑讲义[M].北京:高等教育出版社,2011.
Xiong J C. Lecture notes on point set topology[M]. Beijing:Higher Education Press,2011.

[5] Chicco M,Mignanego F,Pusillo L,et al. Vector optimization problems via improvement sets[J]. J Optim Theory Appl,2011,150(3):516.

[6] Gutiérrez C,Jiménez B,Novo V. Improvement sets and vector optimization[J]. Eur J Operate Res,2012,223(2):304-311.

[7] Zhao K Q,Yang X M. *E*-Benson properefficiency invector optimization[J]. Optimization,2013(10):1018-1023.

[8] Zhao K Q,Yang X M. A unified stability result with perturbations in vector optimization[J]. Optim Lett,2013,7(8):1931-1919.

[9] 杜青香.向量优化中改进集的拓扑内部性质[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(5):32-36.
Du Q X. Some topological internal properties of improvement sets in vector optimization[J]. Chongqing Technol Business Univ:Nat Sci Ed,2014,31(5):32-36.

[10] 张国君.向量优化中改进集的一些拓扑内部性质[J].江苏师范大学学报:自然科学版,2014,32(2):47-49.
Zhang G J. Some topological properties of improvement sets in vector optimization[J]. Journal of Jiangsu Normal University:Natural Science,2014,32(2):47-49.

[11] 张万里,刘金杰,赵克全.向量优化中 free-disposal 集的代数性质[J].西南师范大学学报:自然科学版,2015,40(3):32-36.
Zhang W L,Liu J J,Zhao K Q. On Algebric properties of free-disposal sets in vector optimization[J]. Journal of Southwest China Normal University:Natural Science Edition,2015,40(3):32-36.

Operations Research and Cybernetics

Some Topological Properties of Improvement Sets in Vector Optimization

WU Haiqin, LIU Xuewen

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Improvement sets are an important tool with which to study the vector optimization problems. In this paper, first some properties of topological closures and topological internal of the improvement set are proved. Furthermore, some operational characterizations of topological closures and topological internal of sum for two nonempty sets operations are presented by using improvement sets in topological vector space, and some equivalent characterizations are obtained. In addition, some examples are given to illustrate our main results.

Key words: vector optimization; improvement set; topological closures; topological internal

(责任编辑 黄 颖)