运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160608

半无限规划中的增广拉格朗日鞍点*

谷国利，刘　茜，李　敏
(山东师范大学 数学科学学院，济南 250014)

摘要:考虑一类半无限规划问题,它是许多现实生活问题中数学模型的强力工具。采用一种增广拉格朗日方法来解决半无限规划问题,并且在 Reduction Approach 的条件下,讨论了局部鞍点与局部最优解之间的关系。首先由鞍点的存在性得到了问题的局部最优解。其次在扩展的 MF 约束条件、强二阶充分条件和扩展的强二阶充分条件下又得到了局部最优解是局部鞍点存在的充分条件。

关键词:半无限规划;增广拉格朗日;局部鞍点

中图分类号:O221.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)06-0008-05

1 预备知识

在科学与技术的实践中经常会遇到半无限规划这样的最优化问题,它的目标函数为单值实函数,而约束函数无限多个。半无限规划是一般约束优化问题的推广,它在工程设计、最优控制、经济平衡以及计算机网络系统中有广泛的应用,因此成为了数学规划中非常活跃的研究课题。

本文将考虑如下形式的半无限规划问题:

$$(\mathrm{SIP}):\min f(\boldsymbol{x}),\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in M。\tag{1}$$

其中 $M=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant 0,\boldsymbol{y}\in Y\}$,$f$,$G$ 都是二次连续可微的实值函数,$Y(\subset\mathbf{R}^r)$是无限的紧指标集。

增广拉格朗日方法在解决非凸约束最优化问题中具有重要的理论价值和实际意义。增广拉格朗日方法首次用于由 Hestenes[1] 和 Powell[2] 引入的有限多个等式约束问题中,后又被 Buys[3] 延伸到了有限空间的不等式约束问题中。增广拉格朗日对偶方法的理论性质,在有限维集合中有限个约束条件下,在 Rockafellar[4-5] 的文献中被彻底研究,其中特别是它与共轭对偶理论的联系。增广拉格朗日方法已经被 Rockafellar[4] 用在解决既有等式约束又有不等式约束的最优性问题上。在一个增长条件下,人们能够使对偶问题的值与扰动函数的表现相联系。Rockafellar[4] 引出了二次增长条件的定义,并且得到了在约束优化问题和它的增广拉格朗日对偶问题中对偶间隙为零的充分必要条件。Rockafellar 和 Wets[6] 引出了凸的增广函数的增广拉格朗日,相应的零对偶间隙也被建立。Sun 等人[7-8] 考虑了四类增广拉格朗日函数,在二阶充分条件和某些轻微的附加条件下,得到了所有这些增广拉格朗日函数局部和全局的鞍点存在性的结果。如果能把增广拉格朗日函数的这些结果引入到半无限规划中,那么它的应用会更广泛,意义会更大。

关于半无限规划问题的理论基础备受关注,它的约束函数个数的无限性是解决这类问题的主要困难,为解决这一困难,必须加上一定的条件,才能将半无限规划问题转化为有限的非线性优化问题。然而,近些年已经提出许多解决半无限规划问题的有效方法[9-12],其中既约法是最具代表性的方法:一类是在有限离散的条件下,利用增广拉格朗日方法,讨论了增广拉格朗日乘子存在的充分必要条件[13];另一类是在 Reduction Approach 的条件下,将半无限规划问题转化为有限的非线性优化问题,并且采用了两个凸化的程序,讨论了鞍点的最优性条件和零对偶间隙的存在性质[14-15]。凸化是对偶理论和鞍点最优性发展的基本要求,也是解决非凸最优化问题的一种常见方法。对凸的半无限规划问题存在一个很好的比较成熟的对偶理论[9,16-17],对于非凸的最优化问题,增广拉格朗日方法是最常用的。然而,运用增广拉格朗日方法在 Reduction Approach 的条件下来讨论鞍点的存在性的

* **收稿日期**:2016-04-14　**修回日期**:2016-06-21　**网络出版时间**:2016-11-02 13:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11271226;No. 11271233);山东省自然科学基金(No. ZR2013FL032);留学回国人员科研启动基金(No. 教外司留[2015]1098)

作者简介:谷国利,女,研究方向为非线性规划,E-mail:1209843661@qq.com;**通信作者**:刘茜,副教授,E-mail:lq_qsh@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1334.052.html

研究还不常见。

增广拉格朗日方法是解决非凸约束最优化问题的重要方法，并且它的应用也比较广泛。因此，本文选取了 Huang 和 Yang 在文献[18]中提出的增广拉格朗日函数，但与文献[18]中不同的是本文中的增广函数 $\sigma(u)$ 不要求是凸的，只需满足零极值条件。利用该增广拉格朗日函数，并且在 Reduction Approach 的条件下，研究了(1)式的半无限规划问题的鞍点的性质，得到了局部最优解和局部鞍点存在的充分条件。

2 定义和基本结论

先给出了后面讨论所需要的一些概念和基本结论。令 $C^k(U,\mathbf{R})$，$k\geqslant 1$ 是 k 次连续可微的实值函数空间。集合 $C^{1,1}(U,\mathbf{R})$ 表示定义在 $U\subset\mathbf{R}^n$ 上的一阶导数 Lipschitz 连续的函数全体构成的集合，对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，其积极约束集合为 $Y_0(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in Y|G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\}$。

对(1)式的(SIP)中的紧指标集 Y，给出如下的形式：$Y=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r|u_l(\boldsymbol{y})=0,l\in A,v_k(\boldsymbol{y})\leqslant 0,k\in B\}$。其中 $A=\{1,\cdots,a\}$，$a<r$，$B=\{1,\cdots,b\}$，$u_l,v_k\in C^2(\mathbf{R}^r,\mathbf{R})$，$l\in A$，$k\in B$。假设线性无关的约束条件(LICQ)在每一个 $\overline{\boldsymbol{y}}\in Y$ 成立，即梯度 $Du_l(\overline{\boldsymbol{y}})$，$Dv_k(\overline{\boldsymbol{y}})$，$l\in A$，$k\in B_0$ 是线性无关的，其中 $B_0:=\{k\in B|v_k(\overline{\boldsymbol{y}})=0\}$。

如果 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$，则对每一个 $\overline{\boldsymbol{y}}\in Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$ 是下层问题 $LL(\boldsymbol{x})$：$\min G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，s. t. $\boldsymbol{y}\in Y$ 的全局最小值。在 $\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}$，由线性无关的约束条件知，存在唯一的决定因子 $\overline{\alpha}_l$，$l\in A$，$\overline{\beta}_k\geqslant 0$，$k\in B_0(\overline{\boldsymbol{y}})$，使得

$$D_yG(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})+\sum_{l\in A}\overline{\alpha}_lDu_l(\overline{\boldsymbol{y}})+\sum_{k\in B_0(\overline{\boldsymbol{y}})}\overline{\beta}_kDv_k(\overline{\boldsymbol{y}})=0, \tag{2}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$，并且 $\overline{\boldsymbol{y}}\in Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$，定义 $B_+(\overline{\boldsymbol{y}})=\{k\in B_0(\overline{\boldsymbol{y}})|\overline{\beta}_k>0\}$。

由文献[14]中的命题 2.2，容易得到如下的结论。

引理 1[14]　设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$，$Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})\neq\varnothing$，令 $\boldsymbol{y}^j\in Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$ 是确定的。定义 $B_0^j=B_0(\boldsymbol{y}^j)$，$B_+^j=B_+(\boldsymbol{y}^j)$，对每一个指标集 B^j，$B_+^j\subseteq B^j\subseteq B_0^j$，$j=1,\cdots,m$。如果强二阶充分条件(SSOSC)在 $\boldsymbol{y}^j$ 成立，则在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 的适当的邻域 U 上存在相应的连续可微的隐函数 $\overline{\boldsymbol{y}}^{j,B^j}$ 和唯一的决定因子 $\overline{\boldsymbol{y}}^j:\boldsymbol{x}\in U\longmapsto\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^r$，并且 $\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})$ 是 Lipschitz 连续的，对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$，有 $\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})=\overline{\boldsymbol{y}}^{j,B^j}(\boldsymbol{x})$。

本文考虑增广拉格朗日函数在 Reduction Approach 的条件下的鞍点的存在性，所以需给出关于 Reduction Approach 的结论[4]。

假设 Reduction Approach 在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$ 处成立，则有：1) $Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$ 是有限集合，且 $Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})=\{\boldsymbol{y}^1,\cdots,\boldsymbol{y}^m\}$；2) 存在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 的一个开邻域 U 和唯一的 Lipschitz 连续函数 $\overline{\boldsymbol{y}}^j:\boldsymbol{x}\in U\to\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^r$，$j=1,\cdots,m$，使得 $\overline{\boldsymbol{y}}^j(\overline{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{y}^j$，$G(\cdot,\overline{\boldsymbol{y}}^j(\cdot))\in C^{1,1}(U,\mathbf{R})$，并且 $Y_0(\boldsymbol{x})\subseteq\{\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})|j=1,\cdots,m\}$；3) $M\cap U=\{\boldsymbol{x}\in U|G(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}))\leqslant 0,j=1,\cdots,m\}$。

Reduction Approach 是一个广义的性质，它暗示着如果 Reduction Approach 在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$ 处成立，则(SIP)的可行集 M 在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 周围能够被有限多个 $C^{1,1}$ 函数来描述。

对于(1)式的(SIP)问题，采用 Huang 和 Yang[18] 引入的如下的增广拉格朗日函数的概念。

若 Reduction Approach 在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 成立，对 $\boldsymbol{x}\in U$，其相应的拉格朗日函数为：

$$L(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{j=1}^{m}\lambda_jG(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x})),\lambda_j\geqslant 0,j=1,\cdots,m,$$

则其相应的增广拉格朗日函数为：

$$L_r(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})+\inf_{u_j+G(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}))\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\},j\in\{1,\cdots,m\},$$

其中 $\lambda_j\geqslant 0$，向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$。这里 $\sigma(\boldsymbol{u})$ 满足如下的定义 1。

定义 1[19]　函数 $\sigma:Y\to\mathbf{R}_+$ 在零点有一个谷值，如果：

(A_1) 函数 σ 是连续的，并且 $\sigma(0)=0$；

(A_2) $\inf\{\sigma(\boldsymbol{y})|\ \|\boldsymbol{y}\|\geqslant\delta,\boldsymbol{y}\in Y\}>0$，对所有的 $\delta>0$。

以下约束条件在文中起到了至关重要的作用。

扩展的 MF 约束条件(EMFCQ)　在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in M$ 处成立，如果存在一个向量 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$，使得 $D_xG(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\xi}>0$，对任意的 $\boldsymbol{y}\in Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$。如果 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是(SIP)的局部最小值解，并且 EMFCQ 在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 处成立，则存在有限多个 $\boldsymbol{y}^j\in Y_0(\overline{\boldsymbol{x}})$，$j=1,\cdots,m$，相应的乘子 $\overline{\lambda}_j\geqslant 0$，$j=1,\cdots,m$，使得

$$Df(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_jD_xG(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}^j)=0。\tag{3}$$

定义 2(局部鞍点) 称$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$为某个 $r>0$ 的局部鞍点,如果存在$\bar{\boldsymbol{x}}$的某个开邻域 U,使得对所有的 $\lambda\geqslant 0$,$\boldsymbol{x}\in U$,都有下式成立:

$$L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda)\leqslant L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})\leqslant L_r(\boldsymbol{x},\bar{\lambda})。\tag{4}$$

本文的所有结果,除了在 Reduction Approach 的条件下,另外还有两个条件,强二阶充分条件(SSOSC)和扩展的强二阶充分条件(ESSOSC)。

强二阶充分条件(SSOSC) 令$\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 和$\bar{\boldsymbol{y}}$是满足(2)式且有唯一决定因子的 $LL(\bar{\boldsymbol{x}})$的局部最小值。

强二阶充分条件在$\bar{\boldsymbol{y}}$成立,如果矩阵 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}$ 是正定的,其中

$$\boldsymbol{H}=D^2_{yy}G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})+\sum_{l\in A}\bar{\alpha}_l D^2u_l(\bar{\boldsymbol{y}})+\sum_{k\in B_0(\bar{\boldsymbol{y}})}\bar{\beta}_k D^2 v_k(\bar{\boldsymbol{y}}),$$

$\boldsymbol{V}$ 是子空间的基础矩阵,其子空间为$\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r\mid Du_l(\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{y}=0,Dv_k(\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{y}=0,l\in A,k\in B_+(\bar{\boldsymbol{y}})\}$。

扩展的强二阶充分条件(ESSOSC) 扩展的强二阶充分条件在$\bar{\boldsymbol{x}}$处成立:对任意的 $\lambda\in\Lambda$,Λ 是非空的紧致集,且 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbf{R}^m\mid\lambda$ 是(3)式的解$\}$。矩阵 $D^2f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_jD^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}^{B_0^j})$ 在子空间 $T_w(\bar{\boldsymbol{x}})$上是正定的,其中子空间 $T_w(\bar{\boldsymbol{x}})$是非空闭子集 W 在$\bar{\boldsymbol{x}}$点的切锥,即为所有方向 h 的集合:$T_w(\bar{\boldsymbol{x}})=\{h\in\mathbf{R}^n\mid h=\lim_{k\to\infty}t_k(\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}),t_k\to\infty,\boldsymbol{x}^k\in W\}$,对任意的 k,有 $\boldsymbol{x}^k\to\bar{\boldsymbol{x}}$。

类似于文献[14]中推论 3.1 的证明,易得如下的结果。

引理 2[14] 条件 ESSOSC 在$\bar{\boldsymbol{x}}$成立,当且仅当下面的ESSOSC* 在$\bar{\boldsymbol{x}}$成立:对每一个 $\lambda\in\Lambda$ 和每一个指标集元组$(B^1,\cdots,B^m)$,$B^j_+\subseteq B^j\subseteq B^j_0$,$j=1,\cdots,m$,矩阵 $D^2f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_jD^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}^{B^j})$ 在子空间 $T_w(\bar{\boldsymbol{x}})$上是正定的。

3 定理及主要结果

下面运用增广拉格朗日方法证明了增广拉格朗日函数在 Reduction Approach 的条件下局部鞍点存在的充分条件,同时也证明了局部最优解的充分条件。

定理 1 设$\bar{\boldsymbol{x}}\in M$,在点$\bar{\boldsymbol{x}}$处满足 Reduction Approach 条件,如果$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$是 $L_r(\boldsymbol{x},\lambda)$的某个 $r>0$ 的局部鞍点,则$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(SIP)的局部最优解。

证明 因为$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$是 $L_r(\boldsymbol{x},\lambda)$的某个 $r>0$ 的局部鞍点,即(4)式成立,也就是说

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})+\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})+\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\leqslant \tag{5}$$

$$f(\boldsymbol{x})+\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\},\tag{6}$$

对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$ 和 $\lambda\geqslant 0$,由(5)式有,

$$\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\geqslant\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\Big|_{\bar{\lambda}_j=0}=\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\{r\sigma(\boldsymbol{u})\}\geqslant 0。\tag{7}$$

然而,对任意的 $\boldsymbol{x}\in M\cap U$,有

$$\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\leqslant\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\Big|_{\boldsymbol{u}=0}\leqslant 0。\tag{8}$$

由(7),(8)式可知 $\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}=0$,并且对任意的 $\boldsymbol{x}\in M\cap U$,有 $f(\boldsymbol{x})=L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})\leqslant f(\boldsymbol{x})+\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\leqslant f(\boldsymbol{x})$,即$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(SIP) 的一个局部最优解。 证毕

定理 2 $\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(SIP)的局部最优解,引理 1 的条件成立。假设 Reduction Approach,EMFCQ 和 ESSOSC 在$\bar{\boldsymbol{x}}$处成立,则存在 $r_0>0$ 和$\bar{\boldsymbol{x}}$的邻域 U,使得对任意的 $r\geqslant r_0$,$\lambda\geqslant 0$,$\boldsymbol{x}\in U$,都有 $L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda)\leqslant L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})\leqslant L_r(\boldsymbol{x},\bar{\lambda})$成立。

证明 首先证明第一个不等式,由$\bar{\boldsymbol{x}}$可行,对任意的 $\lambda\geqslant 0$,有

$$\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\leqslant\Big\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_ju_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\Big\}\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}}=0+r\sigma(0)。\tag{9}$$

根据 $\sigma(\boldsymbol{u})\geqslant 0$,$\bar{\lambda}_j\geqslant 0$,$G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))=0$,可以得到

$$\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}=\inf_{u_j\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}\geqslant\inf_{u_j\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j\right\}\geqslant 0。\tag{10}$$

结合(9)式和(10)式，可得

$$\inf_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}=0。\tag{11}$$

因此有 $L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda)=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\inf\limits_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\left\{-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})=L_r(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$。即第 1 个不等式成立。

下面证明第 2 个不等式成立。

由于 $\inf\limits_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\left\{-\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}=0$ 并且 $\inf\limits_{u_j+G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant 0}\left\{-\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j u_j+r\sigma(\boldsymbol{u})\right\}$ 关于 $r>0$ 是单调递增的，所以只需证明：存在 $r_0>0$，$\boldsymbol{x}\in U$，使得

$$L_{r_0}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})\leqslant L_{r_0}(\boldsymbol{x},\bar{\lambda})。\tag{12}$$

用反证法。假设(12)式不成立，即对任意的 $k\in\mathbf{N}$，存在 $\boldsymbol{x}^k\in U\left(\bar{\boldsymbol{x}},\dfrac{1}{k}\right)$，使得 $L_k(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})>L_k(\boldsymbol{x}^k,\bar{\lambda})$。不妨设，当 $k\to\infty$ 时，有 $\boldsymbol{x}^k\to\bar{\boldsymbol{x}}$。

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})=L_k(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})>L_k(\boldsymbol{x}^k,\bar{\lambda})=f(\boldsymbol{x}^k)+\inf_{u_j+G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))\leqslant 0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j u_j+k\sigma(\boldsymbol{u})\right\},$$

即 $f(\bar{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^k)+\inf\limits_{u_j+G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))\leqslant 0}\left\{-\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j u_j+k\sigma(\boldsymbol{u})\right\}$。

令 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{u}+G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\xi}-G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))\leqslant 0$，所以上式可写为：

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^k)+\inf_{\boldsymbol{\xi}\leqslant\mathbf{0}}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j(\boldsymbol{\xi}-G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k)))+k\sigma(\boldsymbol{\xi}-G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k)))\right\}=$$

$$f(\boldsymbol{x}^k)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))+\inf_{\boldsymbol{\xi}\leqslant\mathbf{0}}\{-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}_j+k\sigma(\boldsymbol{\xi}-G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k)))\}\geqslant f(\boldsymbol{x}^k)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))。$$

即

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^k)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))。\tag{13}$$

将 $f(\boldsymbol{x}^k)+\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处泰勒展开：

$$f(\boldsymbol{x}^k)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j G(\boldsymbol{x}^k,\bar{\boldsymbol{y}}^j(\boldsymbol{x}^k))=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j\ (\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}})\bar{\lambda}_j+[D_x f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}DG(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j](\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})+$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\left[D_{\boldsymbol{xx}}f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}D^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j\right](\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})+o(\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2)。$$

因为 Reduction Approach 和 EMFCQ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处成立，所以结论 2)和(3)式成立，即

$$G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}_j=0,D_x f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}DG(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j=0,$$

所以

$$f(\boldsymbol{x}^k)+G(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}_j=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\left[D_{\boldsymbol{xx}}f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}D^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j\right](\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})+o(\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2)。$$

由(13)式可知 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\left[D_{\boldsymbol{xx}}f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j=1}^{m}D^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j\right](\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})+o(\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2)\leqslant 0$，即

$$(\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\left[D_{\boldsymbol{xx}}f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}D^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j\right](\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}})+o(\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2)\leqslant 0。$$

因为 Reduction Approach 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 成立，所以存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的一个开邻域 U 和 Lipschitz 连续函数 $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{x})$，对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$，存在指标集 B^j，$B_+^j\subseteq B^j\subseteq B_0^j$，使得 $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^{B^j}(\boldsymbol{x})$。

令 $d_k=\dfrac{\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|}$，则上式两边同时除以 $\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|$ 得：$d_k^{\mathrm{T}}[D_{\boldsymbol{xx}}f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j=1}^{m}D^2G(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}^j(\bar{\boldsymbol{x}}))\bar{\lambda}_j]d_k\leqslant 0$。

取 $t_k=\frac{\boldsymbol{x}^k-\overline{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{x}^k-\overline{\boldsymbol{x}}\|}$，则在 $T_W(\overline{\boldsymbol{x}})$ 上，$D_{xx}f(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}D^2G(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}^j(\overline{\boldsymbol{x}}))\overline{\lambda}_j\leqslant 0$。由引理1和引理2可知，$D_{xx}f(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}D^2G(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}^j(\overline{\boldsymbol{x}}))\overline{\lambda}_j\leqslant 0$ 在 $T_W(\overline{\boldsymbol{x}})$ 上是正定的，所以产生矛盾，即假设错误，则第2个不等式成立，故结论得证。

证毕

参考文献：

[1] Hestenes M R. Multiplier and gradient methods[J]. Journal of Approximation Theory，1969，4：303-320.

[2] Powell M J D. A method for nonlinear constraints in minimization problems[C]//Fletcher R. Optimization. New York：Academic Press，1969：283-298.

[3] Buys J D. Dual algorithms for constrained optimization problems[D]. The Netherlands，Leiden：University of Leiden，1972.

[4] Rockafellar R T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming[J]. SIAM Journal on Control，1974，12(2)：268-285.

[5] Rockafellar R T. Conjugate duality and optimizatin[C]. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics. Philadephia：SIAM，1974.

[6] Rockafellar R T，Wets R J B. Variational analysis[M]. Berlin，Germany：Springer Verlag，1998.

[7] Li D，Sun X L. Existence of a saddle point in nonconvex constrained optimization[J]. Journal of Global Optimization，2001，21：39-50.

[8] Sun X L，Li D，Mckinnon K I M. On saddle points of augmented Lagrangians for constrained nonconvex optimization[J]. SIAM Journal on Optimization，2005，15：1128-1146.

[9] Hettich R，Kortanek K O. Semi-infinite programming：theory，methods，and applications[J]. SIAM Review，1993，35(3)：380-429.

[10] Hettich R. An implementation of a discretization method for semi-infinite programming[J]. Mathematical Programming，1986，34：354-361.

[11] Still G. Discretization in semi-infinite programming：the rate of convergence[J]. Mathematical Programming，2001，91：53-69.

[12] Zhang L P，Wu S Y，López M A. A new exchange method for convex semi-infinite programming[J]. SIAM Journal on Optimization，2010，20：2959-2977.

[13] Rückmann J J，Shapiro A. Augmented Lagrangians in semi-infinite programming[J]. Mathmatical Programming，Ser B，2009，116：499-512.

[14] Guerra-Vázquez F J，Rückmann J J，Werner R. On saddle point in nonconvex semi-infinite programming[J]. Journal of Approximation Theory，2012，54：433-447.

[15] Rückmann J J. On existence and uniqueness of stationary points in semi-infinite optimization[J]. Mathematical Programming，Ser A，1999，86：387-415.

[16] Bonnans J F，Shapiro A. Perturbation analysis of optimization problems[M]. Heidelberg：Springer，2000.

[17] Goberna M A，López M A. Semi-infinite optimization[M]. Chichester：Wiley，1998.

[18] Huang X X，Yang X X. A unified augmented Lagrangian approach to duality and exact penalization[J]. Mathematics of Operations Research，2003，28：533-552.

[19] Zhou Y Y，Zhou J C，Yang X Q. Existence of augmented Lagrange multipliers for cone constrained optimization problems[J]. Journal of Global Optimization，2014，58(2)：243-260.

Operations Research and Cybernetics

Saddle Points of Augmented Lagrangian for Semi-infinite Programming

GU Guoli，LIU Qian，LI Min

(School of Mathematical Sciences，Shandong Normal University，Jinan 250014，China)

Abstract：A class of semi-infinite programming problem has become a powerful tool for the mathematical modeling of many real-life problems in recent years. In this paper，augmented Lagrangian will be applied to the semi-infinite programming problem and their characterizations in terms of saddle points will be obtained. Under the Reduction Approach condition，the relation between the local saddle point and the local optimal solution will be discussed. Firstly，the local optimal solution of the problem is obtained by the existence of saddle points. Secondly，under EMFCQ SSOSC and ESSOSC conditions，the local optimal solution is the sufficient condition for the existence of the local saddle point.

Key words：semi-infinite programming；augmented Lagrangian；local saddle point

(责任编辑 黄 颖)