DOI:10.11721/cqnuj20160616

具有奇异性及临界指数的双调和椭圆方程组解的存在性*

张玉灵[1]，刘　勇[2]

(1. 郑州升达经贸管理学院 基础部，郑州 451191；2. 江南大学 商学院，江苏 无锡 214122)

摘要：主要研究 Dirichlet 边界条件下一类临界双调和椭圆方程组 $\begin{cases}\Delta^2 u-\mu_1 \dfrac{u}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}+\lambda_1 u, x\in\Omega\\ \Delta^2 v-\mu_2 \dfrac{v}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v+\lambda_2 v, x\in\Omega\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, v=\dfrac{\partial v}{\partial\gamma}=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$ 解的存在性。通过精确的能量估计，并运用山路引理得到了这类方程组非平凡解的存在性。

关键词：双调和方程组；临界指数；Sobolev-Hardy 不等式；山路引理

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)06-0064-05

1 预备知识

本文研究下列的奇异双调和椭圆方程组：

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\mu_1 \dfrac{u}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u\ |v|^{\beta}+\lambda_1 u, x\in\Omega,\\ \Delta^2 v-\mu_2 \dfrac{v}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\ |v|^{\beta-2}v+\lambda_2 v, x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, v=\dfrac{\partial v}{\partial\gamma}=0, x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant5)$ 是包含 0 的有界光滑区域，$0\leqslant\mu_1,\mu_2<\bar{\mu}=[N(N-4)/4]^2$，$\alpha,\beta>1$，$\alpha+\beta=2^*$，$2^*=2N/(N-4)$ 是 Sobolev 临界指数，$0<\lambda_1,\lambda_2<\lambda$，$\lambda$ 是算子 $L[u]=\Delta^2 u-\mu\dfrac{u}{|x|^4}$ 的第一特征值，γ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。在积空间 $H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)=:H\times H$ 中来研究问题(1)，其能量泛函为：

$$J(u,v)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\mu_1\frac{u^2}{|x|^4}+|\Delta v|^2-\mu_2\frac{v^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x-\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega|u|^{\alpha}\ |v|^{\beta}\mathrm{d}x-\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda_2}{2}\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x。\tag{2}$$

那么 $J\in C^1(H\times H,R)$，其对偶积为：

$$\langle J'(u,v),(\varphi,\psi)\rangle=\int_\Omega\left(\Delta u\Delta\varphi-\mu_1\frac{u\varphi}{|x|^4}+\Delta v\Delta\psi-\mu_2\frac{v\psi}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega|u|^{\alpha-2}u\ |v|^{\beta}\varphi\mathrm{d}x-\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega|u|^{\alpha}\ |v|^{\beta-2}v\psi\mathrm{d}x-\lambda_1\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x-\lambda_2\int_\Omega v\psi\mathrm{d}x。\tag{3}$$

其中 $u,v,\varphi,\psi\in H$，$J'(u,v)$ 是 J 在点 (u,v) 处的 Fréche 导数。点 $(u_0,v_0)\in H\times H$ 称为问题(1)的解，如果对任意的 $(\varphi,\psi)\in H\times H$，有 $(u_0,v_0)\neq(0,0)$，$\langle J'(u_0,v_0),(\varphi,\psi)\rangle=0$ 成立。

* 收稿日期：2015-12-10　　修回日期：2016-03-04　　网络出版时间：2016-11-02 13:28

资助项目：国家自然科学基金(No. 71503103)；江苏自然科学基金(No. BK20150157)；河南省教育厅资助项目(No. 17A413004)

作者简介：张玉灵，女，副教授，研究方向为偏微分方程，E-mail：zhangyuling1979@sina.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1328.030.html

求问题(1)的解(u_0,v_0)等价于求 J 的非零临界点,由椭圆正则性理论知$(u_0,v_0)\in C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega})$。

若 $u=v,\lambda_1=\lambda_2$,则方程组(1)变成单个方程:

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\mu\dfrac{u}{|x|^4}=|u|^{2^*-2}u+\lambda u, x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{4}$$

在文献[1]中,作者证明了这类方程解的存在性。若 $\mu_1=\mu_2=0$,则方程组(1)变成

$$\begin{cases}\Delta^2 u=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u\ |v|^{\beta}+\lambda_1 u,\ x\in\Omega,\\ \Delta^2 v=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\ |v|^{\beta-2}v+\lambda_2 v,\ x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, v=\dfrac{\partial v}{\partial\gamma}=0, x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{5}$$

文献[2]证明了这类方程组非平凡解的存在性。其他相关的结果参见文献[3-9]。基于上述文献的研究结果,本文将(4)式和(5)式的结果推广到含有临界指数和奇异系数的双调和椭圆方程组,从而使研究的问题更具有广泛性,但问题也更复杂。

为讨论方便,引入下列记号:对任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$,当 $0\leqslant\mu<\overline{\mu}$ 时,定义 u 的范数为 $\|u\|:=\left\{\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\mu\dfrac{u^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$。由 Sobolev 不等式(引理 1),可证此范数与 $H_0^2(\Omega)$空间中的常用范数 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价。乘积空间 $E:=H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$上的范数为$\|(u,v)\|_E=(\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)}+\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$。

定义

$$K_{\alpha,\beta}:=\inf_{u,v\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\mu_1\dfrac{u^2}{|x|^4}+|\Delta v|^2-\mu_2\dfrac{v^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^\alpha\ |v|^\beta\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}},\tag{6}$$

则由文献[2]知

$$K_{\alpha,\beta}=\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)K。\tag{7}$$

这里的 K 为嵌入 $D^{2,2}(\mathbf{R}^N)\to L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$的最佳常数,$K=\inf\limits_{0\neq u\in H_0^2(\Omega)}\dfrac{\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\mu\dfrac{u^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}$。同时,$K$ 能被函数 u_ε 达到,且 u_ε 满足 $u_\varepsilon=\dfrac{C_N\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-4}{2}}}$,$C_N=(N(N-4)(N^2-4))^{\frac{N-4}{8}}$,$\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^2(\Omega)}=\|u_\varepsilon\|^{2^*}_{2^*}=K^{\frac{N}{4}}$。

本文的主要结果可以总结为下面的定理 1。

定理 1　若 $N\geqslant 5$,则问题(1)至少存在一组能量水平于$\left(0,\dfrac{4}{N}\left(\dfrac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}\right)$的非平凡解。

2 引理及定理的证明

首先给出下列几个引理,它们在定理的证明中将起到重要作用。

引理 1(Sobolev 不等式[3])　设 $2\leqslant q\leqslant 2^*(s)=\dfrac{2(N-s)}{N-4}$,$0\leqslant s\leqslant 4$,则:1) 存在 $C>0$,使得对 $\forall u\in H_0^2(\Omega)$,有

$$\left(\int_\Omega\frac{|u|^q}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}\leqslant C\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x=C\|u\|^2;\tag{8}$$

2) 若 $q<2^*(s)$,Ω 从有界,则 $u\to\dfrac{u}{|x|^{\frac{s}{q}}}$为空间 $H_0^2(\Omega)$到 $L^q(\Omega)$的一个紧嵌入。

引理2　对$\forall u(x)\in W^{2,2}(R^N)$,$N\geqslant 5$,有以下不等式成立

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{4}{N(N-4)}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}|\Delta u|^2\mathrm{d}x。\tag{9}$$

证明　由恒等式$\Delta|x|^{-2}=-2(N-4)|x|^{-4}$可得$2(N-4)|x|^{-4}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x=-\int_{R^N}u^2\Delta\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x$,显然$\Delta(u^2)=2u\Delta u+2|\nabla u|^2$,且$\int_{\mathbf{R}^N}(u\Delta u+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x=0$,因此:

$$(N-4)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x=-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u\Delta u}{|x|^2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x。\tag{10}$$

由于$(u^2)'=2u\nabla u$,则分部积分可得$(N-4)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x=-2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{ux\cdot\nabla u}{|x|^4}\mathrm{d}x$。

由Hölder不等式有

$$\frac{(N-4)^2}{4}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x。\tag{11}$$

结合(10)和(11)式,再次利用Hölderr不等式可得$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{4}{N(N-4)}\left(\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\Delta u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$,等价变形即得(9)式。　证毕

由引理1和引理2知,对任意的$\mu<\bar{\mu}$,算子$L[u]=\Delta^2u-\mu\frac{u}{|x|^4}$都是一正算子。

定义1　称$J(u)$满足$(\mathrm{PS})_c$条件是指:若$u_n\in H_0^2(\Omega)$,且$J(u)\to C$在$H_0^2(\Omega)$中,则$J'(u_n)\to 0$,$\{u_n\}$必有收敛子列。

引理3　对任意$\lambda_1,\lambda_2\in(0,\lambda)$,若$c<\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}$,则$J$满足$(\mathrm{PS})_c$条件。

证明　设$\{(u_n,v_n)\}\subset E$满足$J(u_n,v_n)\to c$,$J'(u_n,v_n)\to 0(n\to\infty)$,则当$n\to\infty$时,有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+\beta}\right)(\|u_n\|^2+\|v_n\|^2-\lambda_1|u_n|_2^2-\lambda_2|v_n|_2^2)=J(u_n,v_n)-\frac{1}{2^*}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle+o(1)\leqslant$$
$$c+1+o(1)\|u_n\|_{H_0^2(\Omega)}+o(1)\|v_n\|_{H_0^2(\Omega)}+o(1)。$$

从而$\|u_m\|_{H_0^2(\Omega)}+\|v_m\|_{H_0^2(\Omega)}\leqslant C$。

设(u_n,v_n)为(u,v)的一个子列,且满足$(u_n,v_n)\xrightarrow{弱}(u,v)$,在$E$中,$(u_n,v_n)\to(u,v)$,a.e.,在$\Omega$中,$(u_n,v_n)\to(u,v)$,在$L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)$中,$p,q\in[1,2^*)$。从而$(u,v)$是方程组(1)的一组解。设$\tilde{u}_n=u_n-u$,$\tilde{v}_n=v_n-v$,则:

$$\|\tilde{u}_n\|^2+\|\tilde{v}_n\|^2=\|u_n\|^2+\|v_n\|^2-(\|u\|^2+\|v\|^2)+o(1),$$
$$\int_\Omega|\tilde{u}_n|^\alpha|\tilde{v}_n|^\beta\mathrm{d}x=\int_\Omega|u_n|^\alpha|v_n|^\beta\mathrm{d}x-\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta\mathrm{d}x+o(1)。$$

当$n\to\infty$时,有$\langle J'(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n),(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\rangle=\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle-\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=o(1)$,因此

$$\lim_{n\to\infty}(\|\tilde{u}_n\|^2+\|\tilde{v}_n\|^2)=2\int_\Omega|\tilde{u}_n|^\alpha|\tilde{v}_n|^\beta\mathrm{d}x=c_1,\tag{12}$$

这里的c_1是一非负常数。

若$c_1=0$,结论成立。故设$c_1>0$,则由(6)和(12)式知:$K_{\alpha,\beta}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{\frac{2}{2^*}}=K_{\alpha,\beta}\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\tilde{u}_n|^\alpha|\tilde{v}_n|^\beta\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}\leqslant\lim_{n\to\infty}(\|\tilde{u}_n\|^2+\|\tilde{v}_n\|^2)=c_1$,由此可得$c_1\geqslant 2\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}$。

另一方面,$J(u,v)=J(u,v)-\frac{1}{2}\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=\frac{4}{N}\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta\mathrm{d}x\geqslant 0$。因此

$$c=J(u_n,v_n)+o(1)=J(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)+J(u,v)+o(1)\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\|\tilde{u}_n\|^2+\|\tilde{v}_n\|^2)-\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega|\tilde{u}_n|^\alpha\ |\tilde{v}_n|^\beta dx+o(1)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha+\beta}\right)c_1\geqslant\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}。$$

这与 $c<\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}$ 矛盾，引理 3 得证。　　证毕

引理 4　若 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,\lambda)$，则存在一组非负函数 $(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}$ 使得 $\sup\limits_{t\geqslant0}J(tu,tv)<\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}$。

证明　令 $\varphi_\varepsilon=\Phi(x)U_\varepsilon(x)$，其中 $\Phi(x)$ 是截断函数，满足 $\begin{cases}\Phi(x)\in C_0^\infty(B_{2\rho}(0)),\rho>0\\ \Phi(x)=1,x\in B_\rho(0)\\ 0\leqslant\Phi(x)\leqslant1,x\in B_{2\rho}(0)\end{cases}$，则有

$$\|\varphi_\varepsilon\|^2=K^{\frac{N}{4}}+o(\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}),\tag{13}$$

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*}=K^{\frac{N}{4}}+o(\varepsilon^{\frac{N}{2}}),\tag{14}$$

$$\|\varphi_\varepsilon\|_2^2=\begin{cases}o(\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}),N=5,6,7,\\ c_3\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+o(\varepsilon^2),N=8,\\ c_2\varepsilon^2+o(\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}),N>8。\end{cases}\tag{15}$$

令 $u=\sqrt{\alpha}\varphi_\varepsilon,v=\sqrt{\beta}\varphi_\varepsilon$，则由(7)，(13)～(15)式及等式 $\max\limits_{t\geqslant0}\left(\frac{t^2}{2}A-\frac{2t^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}B\right)=\frac{2}{N}A\ \left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{N-4}{4}}$，$A,B>0$。易证

$$\max_{t\geqslant0}J(tu,tv)\leqslant\frac{2}{N\cdot2^{\frac{N-4}{4}}}\left[\frac{(\alpha+\beta)\|u\|^2-(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta)\|u\|_2^2}{(\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\|u\|_{2^*}^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{4}}\leqslant$$

$$\frac{2}{N\cdot2^{\frac{N-4}{4}}}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{N}{4}}K^{\frac{N}{4}}=\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}。$$

证明　（定理 1）对任意的 $(u,v)\in E$，有：

$$J(u,v)\geqslant\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_1)\|u\|^2+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_{21})\|v\|^2-\frac{2K_{\alpha,\beta}^{\frac{2^*}{2}}}{\alpha+\beta}(\|u\|^2+\|v\|^2)^{\frac{2^*}{2}}\geqslant C_1\ \|(u,v)\|_E^2-C_2\ \|(u,v)\|_E^{2^*}。$$

这里的 $A_\varepsilon\approx B_\varepsilon$ 表示 $C_1B_\varepsilon\leqslant A_\varepsilon\leqslant C_2B_\varepsilon$。从而存在充分小的常数 $\rho>0$，使得 $a:=\inf\limits_{\|(u,v)\|_E=\rho}J(u,v)>0=J(0,0)$。

另外，对 $\forall(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}$，$J(tu,tv)\to-\infty(t\to\infty)$。因此，$\exists t_0>0$，使得 $\|(t_0u,t_0v)\|_E>\rho$，$J(t_0u,t_0v)<0$。

利用山路引理[2,10]可知，存在序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset E$，使得当 $n\to\infty$ 时，$J(u_n,v_n)\to c$，$J'(u_n,v_n)\to0$，其中，$c=\inf\limits_{r\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}J(r(t))$，$\Gamma=\{r\in C([0,1],E):r(0)=0,J(r(1))<0\}$。

又因为 $0<c<\sup\limits_{t\in[0,1]}J(tt_0u,tt_0v)\leqslant\sup\limits_{t\in[0,1]}J(tu,tv)<\frac{4}{N}\left(\frac{K_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{4}}$，这里的 (u,v) 是由引理 4 给出的。由引理 3 知 (u_n,v_n) 有一个强收敛的子列，不妨记为 (u_m,v_m)，$(u_m,v_m)\to(\tilde{u},\tilde{v})$ 在 E 中。因此 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是 $J(u,v)$ 的临界点并满足方程组(1)，从而 c 是能量泛函 $J(u,v)$ 的临界值，且 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是 $J(u,v)$ 在 E 中相应的临界点，即 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是方程组(1)的一组非平凡解，定理 1 得证。　　证毕

参考文献：

[1] Peng Y F，Zhang Z J. Exisrence of solution for a singular biharmonic eqation involving critical exponent[J]. Acta Mathematica Scientia，2009，29A(6)：1492-1499.

[2] 吕登峰. 一类含临界指数双调和椭圆方程组非平凡解的存在性[J]. 华中师范大学学报：自然科学版，2010，44(3)：382-385.

Lü D F. Existence of nontrivial solution for biharmonic elliptic systems with critical exponents[J]. Journal of Huazhong Normal University：Natural Science，2010，44(3)：382-385.

[3] Alves C O，De D C，Filho M，et al. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents[J]. Nonlinear Analysis，2000，42：771-787.

[4] Brezis H，Lieb E. A relation between point convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proc Amer Math Soc，1983，88：486-490.

[5] Kang D. On the singular inhomogeneous biharmonic problems involving critical Sobolev-Hardy exponents[J]. Journal of South-Central University for Nationalities: Nat Sci Edution, 2005, 24(2): 79-83.

[6] Ambrosetti A, Rabinowitz H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. J Funct Anal, 1973, 14(2): 349-381.

[7] Yao Y X, Shen Y T, Chen Z H. Biharmonic equation and an improved Hardy inequality[J]. Acta Mathematica Scientia, 2004, 20(3): 433-440.

[8] Lin Z X, Chen Z X. Constructing quasi-random subsets of Z_N by using elliptic curves[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities: Series B, 2012, 27(1): 105-113.

[9] Kang D S, Peng S J. Infinitely many solutions to elliptic systems with critical exponents and Hardy potentials[J]. Science China(Mathematics), 2012, 55(10): 2027-2044.

[10] Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents[J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(2): 437-477.

Existence of Solution for a Singular Biharmonic Equations Involving Critical Exponent

ZHANG Yuling, LIU Yong

(1. Department of Basic Science, Shengda College of Economics & Trade Management of Zhengzhou, Zhengzhou 451191;
2. School of Business Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: The existence of solutions is considered for a class of biharmonic equations

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\mu_1\dfrac{u}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}+\lambda_1 u, x\in\Omega\\ \Delta^2 v-\mu_2\dfrac{v}{|x|^4}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v+\lambda_2 v, x\in\Omega\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, v=\dfrac{\partial v}{\partial\gamma}=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$$

with Dirichlet boundary condition and critical exponents. By using Mountain Pass theorem, the existence of non-trivial solutions is proved with delicate energy estimates.

Key words: biharmonic equations; critical exponent; Sobolev-Hardy inequality; mountain pass theorem

(责任编辑 黄 颖)