DOI:10.11721/cqnuj20160606

有限核(2)-群*

薛海波[1]，吕　恒[2]

(1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院，重庆 401524；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘要：一个群 G 被称为核(m)-群当且仅当对 G 的任意子群 H，$|H:H_G|$ 至多可以表示成 m 个素数的乘积。证明了如果有限群 G 是核(m)-群，那么 G 是可解群，且 G 的 Fitting 子群在 G 中的指数至多是 5 个素数的乘积。进一步证明了如果有限超可解群 G 是有限核(2)-群，且群 G 存在极小正规子群 N 是阶为 p^3 的初等交换子群，那么则存在素数 p,q，使得 G 有交换正规子群 A 满足 $|G:A|\mid 2pq$，并且 G 至多只有 4 个互不同构的西洛子群不正规。

关键词：核(m)-群；可解群；Fitting 子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)06-0069-03

1 预备知识

设 n 是一个正整数，一个群 G 被称为 n-核群当且仅当对 G 的任意子群 H，$|H:H_G|\leqslant n$。其中 H_G 是子群 H 在群 G 中的核，即 H 在群 G 中的所有共轭的交。文献[1]证明了如果局部有限群 G 是 n-群，则 G 是交换群被有限群的扩张。文献[2]进一步证明了局部有限群 G 是 n-核群则 G 包含一个交换子群，其指数是与 n 有关的函数。

文献[3-5]研究了有限 n-核群，主要讨论了有限的 p-核 p-群，证明了一个有限 p-群 G 如果是 p-核群，则当 $p=2$，G 包含一个指数至多是 16 的交换正规子群，而当 $p\geqslant 3$，则幂零类 $\mathrm{cl}(G)\leqslant 3$ 且 G 包含一个指数至多是 p^2 的交换正规子群。文献[6]在有限 p-群中继续提出公开研究问题，即研究有限的 p^2-核 p-群。

对于一般的有限 n-核群，对 G 的任意子群 H，文献[7]从 $|H:H_G|$ 的素因子个数入手研究了有限的 n-核群。设 m 是一个正整数，该文定义了一类核(m)-群，即 $|H:H_G|$ 最多可以表示成 m 个素数(可以是相同的素数)的乘积。显然有限 p-核 p-群是有限核(1)-群。当 $m\geqslant 2$ 时候，任意有限核($m-1$)-群一定是有限核(m)-群。文献[7]证明了：一个有限核(1)-群一定含有一个指数整除至多 5 个素数乘积的交换子群(这 5 个素数可以相同)。

本文主要研究有限核(2)-群，结论如下。

设有限群 G 是有限核(2)-群，则 G 是可解群，且 G 的 Fitting 子群在 G 中的指数至多是 5 个素数的乘积。

2 主要结论及证明

由文献[7]，可得下面的引理。

引理 1　设群 G 是有限核(m)-群，则：1) G 的任意子群与商群也是核(m)-群，特别地，当 $m\leqslant 2$ 时候 G 是可解群；2) G 至多只有一个西洛子群不正规。

引理 2　设有限群 G 是有限核(2)-群，则 G 任意极小正规子群 N 是阶小于或者等于 P^3 的初等交换 p-群，p 是素数。特别地，若 $|N|=p^3$，则 G 的西洛 p-子群 P 正规且存在 G 的正子群 $M\leqslant P$ 使得 $P=M\times N$。

证明　由于 G 是可解群，因此 N 是初等交换 p-群。若 $|N|\geqslant p^4$，则 N 中存在群 G 的阶是 P^3 的非正规子群 N_1，又由 G 是有限核(2)-群，则 N_1 的核阶大于或者等于 p，矛盾。

由 $|N|=p^3$ 且是群 G 的极小正规子群，则 N 包含在群 G 的任意的西洛 p-子群 P 中。设 $x\in P-N$ 且假设

* **收稿日期**：2015-11-30　　**修回日期**：2016-04-30　　**网络出版时间**：2016-11-02 13:34

资助项目：国家自然科学基金(No. 11271301；No. 11471226)

作者简介：薛海波，女，讲师，研究方向为群论，E-mail：xuehaibotysy2001@163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1334.048.html

$N\cap\langle x\rangle\neq 1$,则可得$\langle x\rangle_G=1$。由$G$是有限核(2)-群,于是$o(x)\leqslant p^2$。因此可得$o(x)=p^2$。令子群$H=\langle x,N\rangle$,则$|H|=p^4$。取$H$的一个极大子群$H_1$并使得$H_1\neq N$。再由$G$是有限核(2)-群,可得$(H_1)_G\neq 1$。若$|(H_1)_G|\geqslant p^2$,则易得$p\leqslant|(H_1)_G\cap N|\leqslant p^2$,与$N$是极小正规子群相矛盾。若$(H_1)_G$是$p$阶子群且$(H_1)_G\cap N=1$,则$H=(H_1)_G\times N$是初等交换$p$-群,这与$|x|=p^2$相矛盾。因此对任意$x\in P-N$,可得$\langle x\rangle\cap N=1$。

任意取$N_1\leqslant N$是P的阶为P^2的正规子群。令子群$K=\langle x,N_1\rangle$,$x\in P-N$。则K的幂零类小于或者等于2。由$\langle X\rangle\cap N_1=1$可得$|K|=p^2o(x)$且$N$不包含在$K$中。于是$|K_G|\geqslant o(x)$。进一步若$|K_G|>o(x)$,则$p^2\geqslant|K_G\cap N|\geqslant p$,矛盾。因此$|K_G|=o(x)$。

下证K_G是循环群。由于N不包含在K_G中且N是极小正规子群,因此$K_G\cap N=1$。于是又可得$K=K_G\times N_1$。由K/N_1是循环群知$K'\leqslant N_1$,进一步得到K是交换群。而$K=K_G\times N_1=\langle x,N_1\rangle$,$N_1$中含有元$x$,由此易得$K_G$是循环群。$K_G=\langle x_1\rangle$,则$\langle x,N\rangle=\langle x_1\rangle\cap N<G$。从而进一步可得$P\lhd G$且$N\leqslant Z(P)$,又存在$n\in N$和正整数$l$使得$x=x_1^l n$,其中$(l,p)=1$。于是有$\langle X\rangle\lhd P$。从而得到$P$是Dedekind群。

上述证明表明了$N\cap\mho_1(P)=1$,其中特征子群$\mho_1(P)=\langle a^p\,|\,a\in P\rangle$。若$P$是交换群,则$P$的Frattini子群$\Phi(P)=\mho_1(P)P'=\mho_1(P)$。若$P$非交换,则$p=2$且$P=Q_8\times E_{2^m}$,其中$Q_8$是8阶四元素群,$E_{2^m}$是阶为$2^m$的初等交换2-群。易得$\Phi(P)=Q_8'=P'$。假设$Q_8\lhd G$,则$P'\lhd G$,即$N\cap P'=1$。

反之,则$|(Q_8)_G|\leqslant 4$且$Q_8'\leqslant(Q_8)_G$。因此也可得$N\cap\Phi(P)=1$。设P的子群M满足

$$P/\Phi(P)=M/\Phi(P)\times N\Phi(P)/\Phi(P),$$

则$P=\langle M,N\rangle=M\times N$。 证毕

定理1 设有限群G是有限核(2)-群,则G的Fitting子群在G中的指数至多是5个素数的乘积。

证明 任意取素数p整除$|G|$。令P是G的西洛p-子群,则$|P:P_G|\,\big|\,p^2$。又G是可解的,设H是群G的一个Hall p'-子群,即子群P在G中的p-补子群。于是存在素数q,r使得$|H:H_G|$整除qr。显然$PH_G=P\times H_G$。

假设P_G中存在子群T使得$|T:T_G|=p^2$,则对任意元$h\in H_G$,令子群$H_1=T\langle h\rangle$。易得核$(H_1)_G=T_G\times\langle h\rangle_G$,因此$\langle h\rangle_G=\langle h\rangle$。由此表明$H_G$中所有子群是正规子群,因此$PH_G$是幂零群,而$|G:PH_G|\,\big|\,p^2qr$。

若对所有的素数$p\,\big|\,|G|$,群G的西洛p-子群P的核P_G的任意子群L,满足$|L:L_G|\leqslant p$。不妨设存在子群L_1,使得$|L_1:(L_1)_G|=p$。考虑子群$P_G\times H_G$,对于任意子群$S\leqslant H_G$,易得等式$(T_1\times S)_G=(T_1)_G\times S_G$。于是存在素数$t$使得$|S:S_G|\,\big|\,t$。由此表明$H_G$是有限核(1)-群。由引理1,$H_G$中至多有一类西洛子群不正规。若$H_G$中的所有西洛子群正规,则$P_G\times H_G$是幂零子群,且$|G:P_GH_G|\,\big|\,p^2qr$。若$H_G$中存在西洛子群不正规,不妨假设素数$t\,\big|\,|H_G|$使得其西洛子群$T$不正规,此时令$T_1$是$H_G$的Hall-$t'$子群,则$P_GT_GT_1$是幂零正规子群,且$|G:P_GT_GT_1|\,\big|\,p^2qrt$。

若对所有的素数$p\,\big|\,|G|$,都有群G的西洛子群P的核P_G的任意子群T满足$|T:T_G|=1$。由此易得群G的Fitting子群F是Dedekind群。令A是群G的极大交换正规子群,则$A\leqslant F$。因此$|F:A|\leqslant 2$。又A的西洛p-子群$A_P\leqslant P_G$。因此易得A中所有子群正规。从而有$G/C_G(A)$是交换群。假设$C_G(A)$不等于A。由于$C_G(A)/A$是可解群,取$A\leqslant N\leqslant C_G(A)$使得$N/A$是包含在$C_G(A)/A$的一个$G/A$的极小正规子群,则$C_G(A)/A$是阶小于或者等于阶为$s^3$的初等交换$s$-子群,其中$s$是素数。从而得到$N$是群$G$的正规幂零子群,因此$N\leqslant F$。又由$|F:A|\leqslant 2$,于是可得$|N:A|=2$,即$N$是交换子群,矛盾。因此$A=C_G(A)$。不妨假设$p$是整除$|G|$的最大素数,$P$是西洛$p$-子群,则由$G/A$交换可得$PA\lhd G$。显然$A$的Hall$p'$-子群$A_{p'}$是群$G$的特征子群,且$A_{p'}$中每个子群正规,于是得$[A_{p'},P]=1$,即$PA=A_{p'}\times P$。从而说明$P\lhd G$。在商群$G/P$中,由于$PA/P$的每一个子群正规且$G/PA$是交换群,令$q$可得整除$|G/P|$的最大素数,同样可得$G/P$的西洛$q$-子群正规。因此可以得到$G$有西洛塔。设$\pi(G)=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$是$|G|$的素因子集合,其中$p_i<p_{i+1}$,$1\leqslant i\leqslant k-1$。若$G$的西洛$p_k$子群$P_k$存在子群不正规,设$H=P_k$,否则设$i$是最小的数使得群$G$的西洛$p_i$子群$P_i$中存在子群不正规,令$H=P_iP_{i+1}\cdots P_k$,则易得$H\lhd G$。令$K$是$H$在群$G$中补子群,则$|K:K_G|\,\big|\,p_{j_1}p_{j_2}$,其中$j_1<i$,$j_2<i$。因此$K_GH=K_G\times H$。显然$K_G$至多是核(1)-群,即存在一个指数是素数的正规幂零子群K_1,又$(P_i)_GP_{i+1}\cdots P_k$是幂零正规子群,且$|P_i:(P_i)_G|\,\big|\,p_i^2$。从而得到$K_1(P_i)_GP_{i+1}\cdots P_k$是群$G$的幂零正规子群,且该群在群$G$中指数至多是5

个素数的乘积。　　证毕

推论 1　设有限超可解群 G 是有限核(2)-群,若群 G 存在极小正规子群 N 是阶为 p^3 的初等交换子群,则存在素数 p,q,使得 G 有交换正规子群 A 满足 $|G:A|\,\big|\,2pq$。

证明　由引理 2,G 的西洛 p-子群 $P\lhd G$。设 $N=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle$,其中 $a_i^p=1,i=1,2,3$,显然有 $(\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle)_G=1$。设 H 是群 G 的一个 Hall p'-子群。由定理 1,H_G 中所有子群是正规子群,且存在素数 p,q 使得 $|G:PH_G|\,\big|\,pq$。由引理 2,$p=M\times N$。又由引理 2 的证明可知,对任意 $x\in M$,存在 $x_1\in\langle x,N\rangle$ 使得 $x_1\rhd G$ 且 $\langle x,N\rangle=\langle x_1\rangle\times N$。因此存在子群 M,使得 M 中所有子群正规于 G,即 $PH_G=M\times N\times H_G$ 是 Dedekind 群。于是 PH_G 有交换子群 A 满足 $|PH_G:A|\,\big|\,2$,故 $|G:A|\,\big|\,2pq$。　　证毕

推论 2　设有限超可解群 G 是有限核(2)-群,则 G 至多只有 4 个互不同构的西洛子群不正规。

证明　由定理 1,Fitting 子群在 G 中的指数至多是 5 个素数的乘积,由其证明可知至少有两个相同的素数,因此 Fitting 子群在 G 中的指数至多可以表示成 4 个互不相同的素数乘积。　　证毕

参考文献:

[1] Buckley J T,Lennox J C,Neumann B H,et al. Groups with all subgroups normal-by-finite[J]. J Austral Math Soc, 1995,59:384-398.

[2] Cutolo G,Khukhro E I,Lennox J C,et al. Locally finite groups all of whose subgroups are boundedly finite over their cores[J]. Bull London Math Soc,1997,29:563-570.

[3] Cutolo G,Khukhro E I,Lennox J C,et al. Finite core-p p-groups[J]. Journal of Algebra,1997,188:701-719.

[4] Cutolo G,Smith H,Wiegold J. On core-2-groups[J]. Journal of Algebra,2001,237:813-841.

[5] 张军强,任鹏飞. 一类特殊的 p-核 p-群[J]. 数学的实践与认识,2012,42(1):244-248.
Zhang J Q,Ren P F. Some special core-p p-groups[J]. Mathematics in Practice and Theory,2012,42(1):244-248.

[6] 徐明曜. 有限 p-群[M]. 北京:北京大学出版社,2010.
Xu M Y. The limited p-groups[M]. Beijing:Pecking University Press,2010.

[7] Lü H,Shao Z B,Zhou W. Finite groups with each non-normal subgroup having maximal normal cores[J]. Journal of Algebra and Its Applications,2016,15(3):1650053.

Finite Core (2)-groups

XUE Haibo[1], LÜ Heng[2]

(1. Department of Science and Engineering, Chongqing College of Humanities Science and Technology, Chongqing 401524;
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: A group G is called a core(m)-group if and only if $|H:H_G|$ is a product of at most m prime numbers for each subgroup $H\leqslant G$. In this paper, it is proved that the index of the Fitting subgroup in a finite core (2)-group G isa product of at most5 prime numbers. Furthermore, it is also proved that if a supersoluble group G is a finite core (2)-group which has a minimal normal subgroup N of order p^3, then there exist prime numbers p, q such that $|G:A|\,\big|\,2pq$ for a normal abelian subgroup A of G and G has at most four non-isomorphic Slyow subgroups which are not normal.

Key words: core (m)-groups; solvable groups; Fitting subgroups

(责任编辑　黄　颖)