2016 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2016
第 33 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 33 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20160625

Orlicz 差分体的极值不等式*

夏落燕[1]，柏仕坤[2]，曾春娜[2]

(1. 重庆人文科技学院 数学系，重庆 401524；2. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要：研究了空间凸体的 Orlicz 差分体及其极体的极值不等式。利用凸体支持函数的 Orlicz 加概念定义了凸体的 Orlicz 差分体及不对称 Orlicz 差分体，进一步研究了 Orlicz 差分体的极值性质，得到了 Orlicz 差分体与不对称 Orlicz 差分体的仿射不等式。

关键词：Orlicz 差分体；Orlicz 和；Orlicz 径向和

中图分类号：O186.5 **文献标志码：**A **文章编号：**1672-6693(2016)06-0078-04

设 K^n 表示欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸体(具有非空内点的紧致凸集)构成的集合。K_o^n 和 K_s^n 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点在内部和关于原点对称的凸体。S^{n-1} 表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面，单位球记为 B。设 $V(K)$ 表示凸体 K 的 n 维体积。

设 $K\in K^n$，则 K 的支持函数 $h_K(\cdot)=h(K,x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 定义为 $h(K,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\}$，其中 $x\cdot y$ 表示 x 和 y 的标准内积。凸体 K 由它的支持函数 $h_K(\cdot)$ 唯一确定。根据支持函数的定义不难发现，凸体 $-K=\{-x:x\in K\}$ 的支持函数满足 $h(-K,x)=h(K,-x)$。

设 $K,L\in K^n$，实数 $\lambda,\mu\geqslant 0$(不全为 0)，则 Minkowski 线性和 $\lambda K+\mu L$ 是一个凸体并且它的支持函数满足 $h(\lambda K+\mu L,\cdot)=\lambda h(K,\cdot)+\mu h(L,\cdot)$，其中 $\lambda K=\{\lambda x:x\in K\}$。当 $K\in K_o^n$，利用 Minkowski 线性和得到一个非常重要的凸体—差分体(the difference body)定义为：

$$\Delta K=\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}(-K)。$$

著名的 Rogers-Shephard 不等式是与差分体有关的不等式[1-3]。

当实数 $p\geqslant 1$，Minkowski 线性和被推广到 Minkowski-Firey L_p 和。设实数 $p\geqslant 1$，$K,L\in K^n$ 并且实数 λ，$\mu\geqslant 0$(不全为 0)，Minkowski-Firey L_p 和所定义的凸体 $\lambda\cdot K+_p\mu\cdot L$ 的支持函数满足[3]：$h(\lambda\cdot K+_p\mu\cdot L,\cdot)^p=\lambda h(K,\cdot)^p+\mu h(L,\cdot)^p$，其中 L_p Minkowski 数乘满足 $\lambda\cdot K=\lambda^{\frac{1}{p}}K$。

利用 Minkowski-Firey L_p 和，Lutwak 定义了 L_p 差分体 $\Delta_p K$[4-5]。

$$\Delta_p K=\frac{1}{2}\cdot K+_p\frac{1}{2}\cdot(-K)。\tag{1}$$

受 Haber 和 Schuster 思想的启发[6]，Wang 和 Ma 定义了如下的不对称 L_p 差分体 $\Delta_p^\tau K$[7]：设 $K\in K_s^n$，$p\geqslant 1$ 并且实数 $\tau\in[-1,1]$，则

$$\Delta_p^\tau K=a_1(\tau)\cdot K+_p a_2(\tau)\cdot(-K),\tag{2}$$

其中，$a_1(\tau)=\dfrac{(1+\tau)^p}{(1+\tau)^p+(1-\tau)^p}$，$a_2(\tau)=\dfrac{(1-\tau)^p}{(1+\tau)^p+(1-\tau)^p}$。

随着 L_p Brunn-Minkowski 理论的发展，Orlicz Brunn-Minkowski 理论逐渐成熟，其中最关键的是 Orlicz 和与数乘[8]。在本研究中，利用凸体的 Orlicz 和定义了一个新的凸体—Orlicz 差分体，并讨论了它的极值问题。

---

* **收稿日期：**2015-12-01 **修回日期：**2016-01-05 **网络出版时间：**2016-11-02 13:25

资助项目：国家自然科学基金(No.11326073)；重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500312)；重庆市基础与前沿研究项目(No.cstc2014jcyjA00019)

作者简介：夏落燕，女，助教，研究方向为几何不等式，E-mail：xialuoyan1021@163.com；**通信作者：**曾春娜，副教授，E-mail：zengchn @163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1325.012.html

1 预备知识

1.1 Orlicz Minkowski 不等式

令 C_1 表示所有严格递增的凸函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且满足 $\varphi(0)=0$ 的集合。设 $\varphi\in C_1$，$K,L\in K_o^n$，并且实数 $\lambda>0$，$\mu\geqslant0$，则 Orlicz 和定义的凸体 $M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)$ 的支持函数满足[8]：$h_{M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)}(u)=\inf\left\{t>0:\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{t}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{t}\right)\leqslant1\right\}$。当 $\varphi(t)=t^p(p\geqslant1)$ 时，Orlicz 和就是 Minkowski-Firey L_p 和。由 Orlicz 和与 $z\to\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{z}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{z}\right)$ 的严格递增性可得[8]：

$$h_{M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)}=t_u\text{，当且仅当 }\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{t}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{t}\right)=1\text{ 。}\tag{3}$$

根据(3)式，可得 $M_\varphi(\lambda,\mu;K,L)=M_\varphi(\mu,\lambda;L,K)$。

设 $K,L\in K_o^n$，$\varphi\in C_1$ 并且满足 $\varphi(1)=1$。凸体 K 和 L 的 Orlicz 混合体积 $V_\varphi(K,L)$ 被定义为[8]：$V_\varphi(K,L)=\frac{\varphi_l'}{n}\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{V(M(1,\varepsilon;K,L))-V(K)}{\varepsilon}$，其中 $\varepsilon>0$。在文献[8]中证明了 $V_\varphi(K,L)$ 有下列的积分表达式：

$$V_\varphi(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{h_L(u)}{h_K(u)}\right)h_K(u)\mathrm{d}S(K,u)\text{。}\tag{4}$$

这里 $S(K,u)$ 表示凸体 K 的经典表面积测度。特别地对任意的 $K\in K_o^n$ 有：

$$V_\varphi(K,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_K(u)\mathrm{d}S(K,u)=V(K)\text{。}\tag{5}$$

在文献[8]中还证明了关于 Orlicz 混合体积的 Orlicz Minkowski 不等式：设 $K,L\in K_o^n$，$\varphi\in C_1$ 且满足 $\varphi(1)=1$。则

$$V_\varphi(K,L)\geqslant V(K)\varphi\left(\frac{V(L)^{\frac{1}{n}}}{V(K)^{\frac{1}{n}}}\right),\tag{6}$$

当 K 和 L 互为膨胀时等号成立。若 φ 是严格凸函数，等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。

1.2 对偶 Orlicz Minkowski 不等式

设 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若过 $z\in M$ 的直线与集合 M 的交是线段，则称 M 是星形。设 $M\subset\mathbf{R}^n$ 关于点 $z\in M$ 是一个紧致的星形，它的径向函数 $\rho(M,z,\cdot):\mathbf{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$ 被定义为：$\rho(M,z,x)=\max\{\lambda\geqslant0:z+\lambda x\in M\}$。径向函数是 -1 阶齐次的，即 $\rho(M,z,ax)=a^{-1}\rho(M,z,x)$，$a>0$。若星形 M 的径向函数关于变量 x 是连续的，则称 M 为星体。用 S_o^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中所有关于原点的星体的集合。若点 z 是原点，径向函数简记为 $\rho(M,x)$ 或 $\rho_M(x)$。

设 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的星体，它的极体 M^* 被定义为 $M^*=\{x\in\mathbf{R}^n:x\cdot y\leqslant1,\forall y\in M\}$。特别地，当 $K\in K_o^n$，$u\in S^{n-1}$ 时，则

$$\rho(K^*,u)=\frac{1}{h(K,u)},\ h(K^*,u)=\frac{1}{\rho(K,u)}\text{。}\tag{7}$$

令 C_2 表示所有凸的严格递减函数 $\phi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 并且满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$，$\lim\limits_{t\to0}\phi(t)=\infty$ 的集合。设 $K,L\in S_o^n$ 且径向函数分别为 ρ_K,ρ_L。实数 $\lambda,\mu\geqslant0$(不全为 0)且 $\phi\in C_2$，则 K 和 L 的 Orlicz 径向和 $\lambda\cdot K\tilde{+}_\phi\mu\cdot L$ 被定义为[9]：$\rho_{\lambda\cdot K\tilde{+}_\phi\mu\cdot L}(u)=\sup\left\{t\geqslant0,:\lambda\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{t}\right)+\mu\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{t}\right)\leqslant1\right\}$。由于 $z\to\lambda\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{z}\right)+\mu\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{z}\right)$ 是严格递减的，所以

$$\rho_{\lambda\cdot K\tilde{+}_\varphi\mu\cdot L}=t_u\text{，当且仅当 }\lambda\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{t}\right)+\mu\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{t}\right)=1\text{。}\tag{8}$$

对偶的 Orlicz 混合体积被定义为[9]：

$$\tilde{V}_\phi(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{\rho_K(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\text{。}\tag{9}$$

其中，S 表示 S^{n-1} 的 Lebesgue 测度。若 $\phi\in C_2$ 满足 $\phi(1)=1$，在(9)式中令 $K=L$，则任意的 $K\in S_o^n$ 有

$$\tilde{V}_\phi(K,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)=V(K)\text{。}\tag{10}$$

文献[9]证明了下列对偶的 Minkowski 不等式

$$\widetilde{V}_{\phi}(K,L)\geqslant V(K)\phi\left(\frac{V(L)^{\frac{1}{n}}}{V(K)^{\frac{1}{n}}}\right) \tag{11}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 相互膨胀。

令 $M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)$ 表示 $M_{\varphi}(\lambda,\mu;K,L)$ 的极体。

引理1 设 $K,L\in K_o^n\lambda>0$ 且 $\mu\geqslant 0$。$\varphi\in C_1$ 且满足二阶导数 φ'' 存在。当 $t>0$ 时,令 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$,当 $t=0$ 时,$\phi(0)=\lim\limits_{t\to 0}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$,则 $M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)=\lambda\cdot K^{*}\widetilde{+}_{\phi}\mu\cdot L^{*}$。

证明 因为 φ'' 存在且当 $t>0$ 时 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$,因此 $\phi''(t)=\varphi''\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^4}+\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^3}$。此即表明 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ 是凸函数,由 φ 的定义可知 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\in C_2$。由(7)式,知 $\rho_{M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)}(u)=\frac{1}{h_{M_{\varphi}(\lambda,\mu;K,L)}}$。根据 Orlicz 和的定义,(7)式和 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ 得:

$$1=\lambda\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{M_{\varphi}(\lambda,\mu;K,L)}(u)}\right)+\mu\varphi\left(\frac{h_L(u)}{h_{M_{\varphi}(\lambda,\mu;K,L)}(u)}\right)=\lambda\varphi\left(\frac{\rho_{K^{*}}(u)}{\rho_{M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)}(u)}\right)+\mu\varphi\left(\frac{\rho_{L^{*}}(u)}{\rho_{M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)}(u)}\right), \tag{12}$$

利用(8)和(12)式意味着对任意的 $u\in S^{n-1}$,$\rho_{M_{\varphi}^{*}(\lambda,\mu;K,L)}(u)=\rho_{\lambda\cdot K^{*}\widetilde{+}_{\phi}\mu\cdot L^{*}}(u)$。 证毕

2 主要结果

首先,给出 Orlicz 差分体的定义。设 $K\in K_o^n$,$\varphi\in C_1$ 且 $\tau\in[-1,1]$,则定义不对称的 Orlicz 差分体为:

$$\Delta_{\varphi}^{\tau}=M_{\varphi}(f_1(\tau),f_2(\tau);K,-K), \tag{13}$$

其中,$f_1(\tau)=\frac{\varphi(1+\tau)}{\varphi(1-\tau)+\varphi(1+\tau)}$,$f_2(\tau)=\frac{\varphi(1-\tau)}{\varphi(1-\tau)+\varphi(1+\tau)}$。当 $\tau=0$ 时,上式为 $\Delta_{\varphi}K=M_{\varphi}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};K,-K\right)$。由 Orlicz 和知,$\Delta_{\varphi}K$ 是关于原点对称的凸体,称为对称的 Orlicz 差分体。当 $\varphi(t)=t^p$ 且 $p\geqslant 1$ 时,不对称的 Orlicz 差分体(13)即是 Wang 和 Ma 定义的 L_p 不对称差分体(2)[7],而对称的 Orlicz 差分体即是 Lutwak 定义的 L_p 差分体(1)[5]。

特别地,有

$$\Delta_{\varphi}^{0}K=\Delta_{\varphi}K,\Delta_{\varphi}^{1}K=K,\Delta_{\varphi}^{-1}K=-K。 \tag{14}$$

定理1 设 $\varphi\in C_1$ 且满足 $\varphi(1)=1$。若 $K\in K_o^n$,$\tau\in[-1,1]$,则

$$V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)\geqslant V(K), \tag{15}$$

当 $\tau=\pm 1$ 时等号成立,当 $\tau\neq\pm 1$ 时等号成立的充要条件是 K 是原点对称的凸体。

证明 由(3)~(5),(13)式及 Orlicz Minkowski 不等式(6),可得

$$V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_{\Delta_{\varphi}^{\tau}K}(u)\mathrm{d}S(\Delta_{\varphi}^{\tau}K,u)=$$

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left[f_1(\tau)\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\Delta_{\varphi}^{\tau}K}(u)}\right)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{h_{-K}(u)}{h_{\Delta_{\varphi}^{\tau}K}(u)}\right)\right]h_{\Delta_{\varphi}^{\tau}K}(u)\mathrm{d}S(\Delta_{\varphi}^{\tau}K,u)=$$

$$f_1(\tau)V_{\varphi}(\Delta_{\varphi}^{\tau}K,K)+f_2(\tau)V_{\varphi}(\Delta_{\varphi}^{\tau}K,-K)\geqslant$$

$$f_1(\tau)\varphi\left(\frac{V(K)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)^{\frac{1}{n}}}\right)V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)+f_2(\tau)\varphi\left(\frac{V(-K)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)^{\frac{1}{n}}}\right)V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K),$$

此即 $1\geqslant\varphi\left(\frac{V(K)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)^{\frac{1}{n}}}\right)$。因为 φ 是严格递增函数且 $\varphi(1)=1$,所以 $V(\Delta_{\varphi}^{\tau}K)\geqslant V(K)$,此即不等式(15)。由(12)式,可知当 $\tau=\pm 1$ 时不等式(15)取得等号。当 $\tau\neq\pm 1$ 时,由 Orlicz Minkoski 不等式等号成立的条件可知当 $\Delta_{\varphi}^{\tau}K$ 与 K 膨胀,$\Delta_{\varphi}^{\tau}K$ 与 $-K$ 是膨胀的不等式(15)取得等号,说明 $K=-K$,即 K 是原点对称的凸体。进一步,φ 是严格凸函数时等号成立当且仅当 K 是原点对称的凸体。 证毕

Orlicz 差分体 $\Delta_{\varphi}^{\tau}K$ 的极体记为 $\Delta_{\varphi}^{\tau,*}K$,可得下列定理2。

定理 2 设 $\varphi\in C_1$ 且二阶导数 φ''存在及 $\varphi(1)=1$。当 $K\in K_o^n$，$\tau\in[-1,1]$，则

$$V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)\leqslant V(K^*),\tag{16}$$

当 $\tau=\pm1$ 时等号成立，当 $\tau\neq\pm1$ 时号成立的充要条件是 K 是原点对称的凸体。

证明 由于 $\varphi\in C_1$ 且二阶导数 φ''存在，φ 严格递增函数满足 $\varphi(1)=1$，所以令当 $t>0$ 时 $\phi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$，当 $t=0$ 时 $\phi(0)=\lim\limits_{t\to0}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$。由引理 1 知，$\Delta_\varphi^{\tau,*}K$ 的径向函数满足 $f_1(\tau)\phi\left(\frac{\rho_{K^*}(u)}{\rho_{\Delta_\varphi^{\tau,*}}(u)}\right)+f_2(\tau)\phi\left(\frac{\rho_{(-K)^*}(u)}{\rho_{\Delta_\varphi^{\tau,*}}(u)}\right)=1$。再结合(9)式及对偶 Orlicz Minkowski 不等式(11)，得

$$V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho^n_{\Delta_\varphi^{\tau,*}K}(u)\mathrm{d}S(u)=$$

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left[f_1(\tau)\phi\left(\frac{\rho_{K^*}(u)}{\rho_{\Delta_\varphi^{\tau,*}K}(u)}\right)+f_2(\tau)\phi\left(\frac{\rho_{(-K)^*}(u)}{\rho_{\Delta_\varphi^{\tau,*}K}(u)}\right)\right]\rho^n_{\Delta_\varphi^{\tau,*}K}(u)\mathrm{d}S(u)=$$

$$f_1(\tau)\,\widetilde{V}_\phi(\Delta_\varphi^{\tau,*}K,K)+f_2(\tau)\,\widetilde{V}_\phi(\Delta_\varphi^{\tau,*}K,-K^*)\geqslant$$

$$f_1(\tau)\phi\left(\frac{V(K^*)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)^{\frac{1}{n}}}\right)V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)+f_2(\tau)\phi\left(\frac{V(-K^*)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)^{\frac{1}{n}}}\right)V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K),$$

此即 $1\geqslant\phi\left(\frac{V(K^*)^{\frac{1}{n}}}{V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)^{\frac{1}{n}}}\right)$。因为 ϕ 是严格递增函数且 $\phi(1)=1$，所以 $V(\Delta_\varphi^{\tau,*}K)\leqslant V(K^*)$。由(12)式，可知当 $\tau=\pm1$ 时不等式(16)取得等号。当 $\tau\neq\pm1$ 时，由对偶 Orlicz Minkoski 不等式等号成立的条件可知当 $\Delta_\varphi^{\tau,*}K$ 与 K^* 膨胀，$\Delta_\varphi^{\tau,*}K$ 与 $-K^*$ 是膨胀的不等式(16)取得等号，所以 $K=-K$，即 K 是原点对称的凸体。 证毕

参考文献：

[1] Chakerian G. Inequalitied for the difference body of a convex body[J]. Proc Amer Math Soc，1967，18(5)：879-884.

[2] Rogers C，Shephard G. The difference body of a convex body[J]. Arch Math (Basel)，1957，8：220-233.

[3] Schneider R. Convex bodies：the Brunn-Minkowski theory，Encyclopedia of mathematics and its applications：second expanded edition[M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[4] Bianchini M，Colesanti A. A sharp Rogers and Shephard inequality for the p-difference body of planar convex bodies [J]. Proc Ame Math Soc，2008，136(7)：2575-2582.

[5] Lutwak E. The brunn Minkowski-Firey theory i：mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differ Geom，1993，38：131-150.

[6] Haberl C，Schuster F. General L_p affine isoperimetric inequality[J]. J Differ Geom，2009，257(3)：641-658.

[7] Wang W，Ma T. Asymmetric L_p difference bodies[J]. Proc Amer Math Soc，2014，142：2517-2527.

[8] Xi D，Jin H，Leng G. The Orlicz-Brunn-Minkowski inequality[J]. Adv Math，2014，260：350-374.

[9] Zhu B，Zhou J，Xu W. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory [J]. Adv Math，2014，264：700-725.

The Extremal Values Inequality of Orlicz Difference Bodies

XIA Luoyan[1]，BAI Shikun[2]，ZENG Chunna[2]

(1. Department of Mathematics，Chongqing College of Humanities，Science & Technology，Chongqing 401524；

2. College of Mathematics Science，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China)

Abstract：The extremal values inequality of Orlicz difference bodies of convex body in space was investigated. The Orlicz difference bodies and the asymmetric Orlicz difference bodies of convex bodies were introduced by using the Orlicz addtion of support function of convex body. Moreover，the extremal values inequality of Orlicz difference bodies was studied and some affine inequalities for the Orlicz difference bodies were obtained.

Key words：the Orlicz difference bodies；Orlicz combination；Orlicz radial sum

（责任编辑 游中胜）