DOI:10.11721/cqnuj20160611

一类具 p-Laplacian 算子的奇异边值问题解的存在性*

王和香[1]，胡卫敏[2]

(1. 喀什大学 数学与统计学院，新疆 喀什 844006；2. 伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000)

摘要：利用 Kranoselskii 不动点定理，研究了一类具 p-Laplacian 算子的奇异方程边值问题正及半正时正解的存在性，并给出正解存在的充分条件。

关键词：分数阶边值问题；p-Laplacian 算子；奇异正和奇异半正；Kranoselskii 不动点定理

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)06-0082-07

近年来，分数阶微分方程在化学工程、热弹力学以及人口动态等问题中得到很好地应用。对于奇异微分方程边值问题，整数阶的研究最早是由 Taliaferro[1] 开始。而对于分数阶的奇异边值问题的研究，目前也得到了很多结论[1-16]。

2005 年，Bai 等人[2] 考虑了非线性分数阶微分方程 Dirichlet 型边值问题：$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$，其中 $1<\alpha<2$ 是实数，$D_{0^+}^{\alpha}$ 是标准的 Riemann-Liouville 微分，且 f 可以在 $u=0$ 奇异。2009 年，Bai 等人[3] 应用压缩映像原理和锥不动点指数定理，考虑了非线性分数阶微分方程奇异边值问题 $\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1 \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0 \end{cases}$ 正解的存在性，其中 $2<\alpha\leqslant 3$，$D_{0^+}^{\alpha}$ 是 Caputo 微分 $f:(0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$\lim\limits_{t\to 0}f(t,\cdot)=+\infty$(即 f 在 $t=0$ 具有奇性)。2015 年，Han 等人[4] 应用 Kranoselskii 不动点定理考虑了一类具 p-Laplacian 算子的非线性分数阶微分方程边值问题 $\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t)))=\lambda f(u(t)) \\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0 \\ \varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(1)))'=0 \end{cases}$ 多重正解的存在性，其中 $2<\alpha\leqslant 3$。

受以上文献启发，本文研究一类具 p-Laplacian 算子的微分方程奇异边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t)))=a(t)f(t,u(t)), 0<t<1 \\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0, 1<\beta\leqslant 2 \\ \varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(1)))'=0, 3<\alpha\leqslant 4 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 φ_p 为 p-Laplacian 算子，满足 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s, p>1, \varphi_p^{-1}=\varphi_q$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。$D_{0^+}^{\alpha}$，$D_{0^+}^{\beta}$ 为标准的 Riemann-Liouville 导数，a，f 为连续函数且 $f(t,u)$ 在 $u=0$ 奇异。通过分析格林函数的性质，利用 Kranoselskii 不动点定理证明其解的存在性，并举例说明。

1 预备知识

定义 1[5]　函数 $G(t,s)$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分是指 $I_{0^+}^{\alpha}y(t)=\dfrac{1}{G(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s$，其中 $n=[\alpha]+1$，右边是在 $(0,+\infty)$ 上逐点定义的。

* **收稿日期**：2015-11-21　**修回日期**：2016-05-11　**网络出版时间**：2016-11-02 13:28

资助项目：新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目(No. XJEDU20141040)；新疆维吾尔自治区自然科学基金(No. 201318101-14)

作者简介：王和香，女，研究方向为微分方程理论与应用，E-mail：468185856@qq.com；**通信作者**：胡卫敏，教授，E-mail：hwm680702@163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1328.040.html

定义 2[5]　函数 $G(t,s)$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 微分是指 $D_{0^+}^{\alpha}y(t)=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\displaystyle\int_0^t\dfrac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s$，其中 $n=[\alpha]+1$，右边是在 $(0,+\infty)$ 上逐点定义的。

引理 1[6]　设 $\alpha>0$，如果 $u\in C(0,1)\cap L^1(0,1)$，那么微分方程 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)=0$ 有唯一解 $u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N}$，其中 $c_i\in R(i=1,2,\cdots,N)$，N 是大于或等于 α 的最小整数。

引理 2[6]　设 $u\in C(0,1)\cap L^1(0,1)$，有 $I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N}$，其中 $c_i\in R(i=1,2,\cdots,N)$，N 是大于或等于 α 的最小整数。

引理 3[7]　设 $h\in C[0,1]$，则 $\begin{cases}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=h(t),3<\alpha\leqslant 4,0<t<1\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0\end{cases}$ 的唯一解为 $u(t)=\displaystyle\int_0^1G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1}+(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)s],0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ (1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)s],0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}\tag{2}$$

称为边值问题(1)的格林函数。

引理 4[7]　由(2)式定义的格林函数满足如下关系：1) $G(t,s)=G(1-s,1-t)$，$G(t,s)\geqslant 0$，对 $\forall\, t,s\in[0,1]$；2) $(\alpha-2)q(t)k(s)\leqslant\Gamma(\alpha)G(t,s)\leqslant M_0k(s)$，$(\alpha-2)q(t)k(s)\leqslant\Gamma(\alpha)G(t,s)\leqslant M_0q(t)$，对 $\forall\, t,s\in(0,1)$，其中 $M_0=\max\{\alpha-1,(\alpha-2)^2\}$，$q(t)=t^{\alpha-2}(1-t)^2$，$k(s)=s^2(1-s)^{\alpha-2}$。

引理 5[4]　设 $1<\beta\leqslant 2$，$3<\alpha\leqslant 4$，则 $\begin{cases}D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t)))=\lambda f(t,u(t)),0<t<1\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0\\ \varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(1)))'=0\end{cases}$ 有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $H(s,\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases}s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-2}-(s-\tau)^{\beta-1},\tau\leqslant s\\ s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-2},s\leqslant\tau\end{cases}$，$G(t,s)$ 为(2)式所定义。

引理 6[8]　设 X 是 Banach 空间，$P\subset X$ 是 X 上的锥，Ω_1,Ω_2 是 X 上的开集且满足 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$S:P\to P$ 是全连续算子，若：1) $\|S\omega\|\leqslant\|\omega\|,\omega\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|S\omega\|\geqslant\|\omega\|,\omega\in P\cap\partial\Omega_2$，或 2) $\|S\omega\|\geqslant\|\omega\|,\omega\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|S\omega\|\leqslant\|\omega\|,\omega\in P\cap\partial\Omega_2$ 成立，则 S 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有不动点。

首先建立 Banach 空间 $E=C[0,1]$ 中的锥 K，定义 $K=\{u\in E\,|\,u(t)\geqslant\Delta q(t)\|u\|,t\in[0,1]\}$，其中 $\Delta=\dfrac{\alpha-2}{M_0}$，$\|u\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$。

定义算子 $A:K\to E$，则 $(Au)(t)=\displaystyle\int_0^1G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$。

定理 1　设 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续，则算子 $A:K\to E$ 是全连续的。

证明　由引理 4 有 $(Au)(t)\leqslant\dfrac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^1k(s)\varphi_q\left(\int_0^1a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$，即：

$$\|Au\|\leqslant\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1k(s)\varphi_q\left(\int_0^1a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。$$

又有 $(Au)(t)\geqslant\dfrac{(\alpha-2)q(t)}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^1k(s)\varphi_q\left(\int_0^1a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\Delta q(t)\|Au\|$。

因此，$A(K)\subset K$，$A:K\to K$ 是全连续。　　证毕

2 奇异正问题

首先给出一些条件：

(H_1) $a\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$，$a\in(0,1)$ 且 $a>0$；

(H_2) $f:[0,1]\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$；

(H_3) $f(t,u)\leqslant g(u)+h(u)$，$(t,u)\in[0,1]\times(0,+\infty)$，其中 $g>0$ 在 $(0,+\infty)$ 连续非增，$h>0$ 在 $(0,+\infty)$ 连续非减，$\dfrac{h}{g}$ 在 $(0,+\infty)$ 上非减；

(H_4) $\exists K_0$,满足 $g(xy)\leqslant K_0 g(x)g(y)$,$\forall x,y>0$;

(H_5) $a_0=\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)g(q(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s<\infty$;

(H_6) $\exists r>0$,$\dfrac{r}{[g(r)+h(r)]^{q-1}}>\dfrac{a_0 M_0 K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}[K_0 g(\Delta)]^{q-1}$;

(H_7) $\exists 0<\theta<\dfrac{1}{2}$(固定)连续,使得 $f(t,u)\geqslant g_1(u)+h_1(u)$。其中$(t,u)\in[\theta,1-\theta]\times(0,+\infty)$,$g_1:(0,\infty)\to(0,\infty)$非增,$h_1:[0,\infty)\to(0,\infty)$连续且$\dfrac{h_1}{g_1}$在$(0,+\infty)$上非减;

(H_8) $\exists 0<R_1<r<R_2$,使得:

$$\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s>\left(\frac{g_1(\Delta\theta^\alpha R_2)}{g_1(R_1)(g_1(\Delta\theta^\alpha R_2)+h_1(\Delta\theta^\alpha R_2))}\right)^{q-1}\cdot R_1,$$

其中 $G(t,s)$是(2)式中定义的格林函数,有:

$$\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\sup_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s;$$

(H_9) $\exists 0<R_1<r$,使得:

$$\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s>\left(\frac{g_1(\Delta\theta^\alpha R_1)}{g_1(R_1)(g_1(\Delta\theta^\alpha R_1)+h_1(\Delta\theta^\alpha R_1))}\right)^{q-1}\cdot R_1。$$

定理2 条件(H_1)~(H_8)成立,则边值问题(1)有两个非负解 u_1 和 u_2,且 $R_1<\|u_1\|<r<\|u_2\|<R_2$,$t\in(0,1)$。

证明 首先给出边值问题(1)的一个解 u_2。

当 $t\in(0,1)$时,$u_2(t)>0$ 且 $t<\|u_2\|<R_2$,设 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<r\}$,$\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<R_2\}$。

先证:

$$\|Au\|<\|u\|,K\cap\partial\Omega_1。\tag{3}$$

令 $u\in K\cap\partial\Omega_1$,则 $\|u\|=\|u\|_{[0,1]}=r$。当 $t\in[0,1]$时,$u(t)\geqslant\Delta q(t)r$,可得:

$$\begin{gathered}(Au)(t)\leqslant\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k(s)\varphi_q\{\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)[g(u(\tau))+h(u(\tau))]\mathrm{d}\tau\}\mathrm{d}s\leqslant\\ \frac{M_0K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k(s)\varphi_q\left\{\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\cdot g(q(\tau))g(\Delta r)\left[1+\frac{h(r)}{g(r)}\right]\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s\leqslant\\ \frac{M_0K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(g(\Delta r)\left[1+\frac{h(r)}{g(r)}\right]\right)^{q-1}\cdot\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)g(q(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。\end{gathered}$$

由条件(H_6)有$(Au)(t)<r$,因此有 $\|Au\|=\|Au\|_{[0,1]}<r=\|u\|$,即(3)式成立。

下证:

$$\|Au\|>\|u\|,K\cap\partial\Omega_2。\tag{4}$$

设 $u\in K\cap\partial\Omega_2$,则 $\|u\|=\|u\|_{[0,1]}=R_2$。当 $t\in[0,1]$时,$u(t)\geqslant\Delta q(t)R_2$,可得:

$$\begin{gathered}(Au)(t)\geqslant\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left\{\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\cdot[g_1(u(\tau))+h_1(u(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s\geqslant\\ [g_1(R_2)]^{q-1}\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left\{\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\cdot\left(1+\frac{h_1(\Delta\theta^\alpha R_2)}{g_1(\Delta\theta^\alpha R_2)}\right)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s\geqslant\\ [g_1(R_2)]^{q-1}\left(1+\frac{h_1(\Delta\theta^\alpha R_2)}{g_1(\Delta\theta^\alpha R_2)}\right)^{q-1}\cdot\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。\end{gathered}$$

由条件(H_8)有$(Au)(\sigma)>R_2=\|u\|$。因此有 $\|Au\|>\|u\|$,即(4)式成立。

由引理6,算子 A 有不动点 $u_2\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$满足 $r\leqslant\|u_2\|=\|u_2\|_{[0,1]}\leqslant R$,又由(3)式和(4)式可知 $\|u_2\|\neq r$,$\|u_2\|\neq R$。因此有 $r\leqslant\|u_2\|\leqslant R$。

类似地,设 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<R_1\}$,$\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<r\}$。可证:存在边值问题(1)的解 $u_1(t)>0$,$t\in(0,1)$,且有 $R_1\leqslant\|u_1\|\leqslant r$。

综上,定理2得证。 证毕

定理3 若条件(H_1)~(H_7)和(H_9)成立,则边值问题(1)至少有一个非负解 $u_1>0$ 满足 $R_1\leqslant\|u_1\|<r$,

$t\in(0,1)$。

注 1　若条件(H_9)中 $R_2>r$,则 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$ 有一非负解 $u_2>0$,满足 $r\leqslant\|u_1\|<R,t\in(0,1)$。

注 2　若条件(H_1)~(H_5)和(H_8)成立,$\exists m\in\{1,2,\cdots\}$,$R_i,r_i(i=1,2,\cdots,m)$使得 $0<R_1<r_1<R_2<r_2<\cdots<R_m<r_m$ 时有

$$\frac{r_i}{[g(r_i)+h(r_i)]^{q-1}}>\frac{a_0M_0K_0}{\Gamma(\alpha)}[K_0g(\Delta)]^{q-1},$$

$$\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s>\left(\frac{g_1(\Delta\theta^\alpha R_i)}{g_1(R_1)(g_1(\Delta\theta^\alpha R_i)+h_1(\Delta\theta^\alpha R_i))}\right)^{q-1}\cdot R_i$$

成立,则边值问题(1)有非负解 $y_i(t)>0(i=1,2,\cdots,m)$,$t\in(0,1)$。

例 1　考虑边值问题:

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{3}{2}}(\varphi_p(D_{0^+}^{\frac{7}{2}}u(t)))=\sigma(u^{-a}(t)+u^b(t))\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0)\\ \varphi_p(D_{0^+}^{\frac{7}{2}}u(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\frac{7}{2}}u(1)))'=0\end{cases},\tag{5}$$

其中 $0<t<1,0<a<1<b$,$a_1=\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)[q(\tau)]^{-a}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$,当 $\sigma\in(0,\sigma_0)$时,有 $\sigma_0\leqslant\frac{1}{2a_1}$,则边值问题(5)有两个正解 u_1 和 u_2。

证明　因为 $g(u)=g_1(u)=u^{-a}$,$h(u)=h_1(u)=u^b$,$a(t)=\sigma$,$K_0=1$,$\theta=\frac{1}{4}$。易证(H_1)~(H_5)和(H_7)成立,$a_0=\frac{\Gamma(\alpha)\sigma a_1}{M_0}\left(\frac{M_0}{\alpha-2}\right)^{-a(q-1)}$。

注意到当 $r=1$ 时,有$[g(r)+h(r)]^{q-1}\cdot r=2^{q-1}>\frac{1}{2}\geqslant a_1\sigma_0\geqslant K_0^q a_0\left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\right)(\Delta)^{-a(q-1)}=\frac{a_0M_0K_0}{\Gamma(\alpha)}(K_0g(\Delta))^{q-1}$,所以($H_6$)成立。

当最小 R_1 和最大 R_2 存在时($i=1,2$),有

$$\left(g_1(R_i)\left[1+\frac{h_1(\Delta\theta^{\frac{7}{2}}R_i)}{g_1(\Delta\theta^{\frac{7}{2}}R_i)}\right]\right)^{-(q-1)}\cdot R_i=R_i^{1+a}[1+(\Delta\theta^{\frac{7}{2}}R_i)^{a+b}]^{-(q-1)},$$

且 $\lim\limits_{R_1\to 0}R_1^{1+a}(1+(\Delta\theta^{\frac{7}{2}}R_1)^{a+b})^{-(q-1)}=\lim\limits_{R_2\to\infty}R_2^{1+a}(1+(\Delta\theta^{\frac{7}{2}}R_2)^{a+b})^{-(q-1)}=0$。所以($H_8$)成立。

综上,由定理 2 可证边值问题(5)存在两个正解。　证毕

3 奇异半正问题

引理 7　设 a 连续,$M\in C$ 且 $M>0$ 边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t)))=Ma(t),0<t<1\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0,1<\beta\leqslant 2\\ \varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(1)))'=0,3<\alpha\leqslant 4\end{cases}\tag{6}$$

有一解 ω 满足 $0<\omega(t)\leqslant M_0c_0$。其中 $c_0=\frac{M_0^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)e(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$,$0<t<1$。

证明　由引理 6 可得边值问题(6)有解 $\omega(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 Ma(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$。

由引理 4,有 $0<\omega(t)\leqslant\int_0^1\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}q(t)\varphi_q\left(\int_0^1 Ma(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\frac{\Delta}{\Gamma(\alpha)}q(t)\cdot c_0$。

首先给出一些条件:

(I_1) $a\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$,$a\in(0,1)$;

(I_2) $f:[0,1]\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 连续且有 $f(t,u)+M\geqslant 0,(t,u)\in(0,1)\times(0,\infty)$;

(I_3) $f^*(t,u)\triangleq f(t,u)+M\leqslant g(u)+h(u)$,$(t,u)\in(0,1)\times(0,+\infty)$且 $g>0$ 在$(0,+\infty)$上连续非增,$h\geqslant 0$

在$[0,+\infty)$上连续，$\frac{h}{g}$在$(0,+\infty)$上非减；

(I_4) $\exists K_0$，满足 $g(xy)\leqslant K_0 g(x)g(y)$，$\forall x,y>0$；

(I_5) $a_0=\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)g(q(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s<\infty$；

(I_6) $\exists r>\frac{Mc_0}{\Gamma(\alpha)}$使得$\left\{g\left[\Delta\left(r-\frac{Mc_0}{\Gamma(\alpha)}\right)\right]\left[1+\frac{h(r)}{g(r)}\right]\right\}^{1-q}\cdot r\geqslant\frac{a_0 M_0 K_0{}^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}$；

(I_7) $\exists 0<\theta<\frac{1}{2}$(固定)，使得 $f(t,u)+M\geqslant g_1(u)+h_1(u)$，其中$(t,u)\in[\theta,1-\theta]\times(0,+\infty)$，$g_1:(0,\infty)\to(0,\infty)$连续非增，$h_1:[0,\infty)\to(0,\infty)$连续且$\frac{h_1}{g_1}$在$(0,\infty)$上非增；

(I_8) $\exists 0<R_1<r<R_2$，使得 $\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s>\left(\frac{g_1(\Delta\varepsilon\theta^\alpha R)}{g_1(R)(g_1(\Delta\varepsilon\theta^\alpha R)+h_1(\Delta\varepsilon\theta^\alpha R))}\right)^{q-1}\cdot R$，其中$\forall\varepsilon>0$，对任何一个固定 θ，有 $1-\frac{Mc_0}{R\Gamma(\alpha)}\geqslant\varepsilon$，$G(t,s)$是格林函数，且有

$$\int_\theta^{1-\theta}G(\sigma,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\sup_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。$$

定理4　设条件$(\mathrm{I}_1)\sim(\mathrm{I}_8)$成立，则(1)式有解 y_1 且满足 $y_1\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$，$y(t)>0$，$t\in(0,1)$。　证毕

证明　为证明(1)式存在一个非负解，首先考虑边值问题：

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}y(t)))=a(t)f^*(t,y(t)-\psi(t)),0<t<1\\ y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0,1<\beta\leqslant 2\\ \varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}y(0))=(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}y(1)))'=0,3<\alpha\leqslant 4\end{cases}\tag{7}$$

解的存在性，其中 $\psi(t)=M\omega(t)$。

首先由引理6可证，(1)式存在一个解 y_1，且当 $t\in(0,1)$时，$y_1(t)>\psi(t)$。如果该解存在，则满足

$$\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t))=\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}y_1(t))-\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}\psi(t))\tag{8}$$

的 $u(t)$是边值问题(1)的一个非负解。

因为

$$D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u(t)))=D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}y_1(t)))-D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}\psi(t)))=a(t)f^*(t,y_1(t)-\psi(t))-Ma(t)=$$
$$a(t)[f(t,y_1(t)-\psi(t))+M]-Ma(t)=a(t)f(t,y_1(t)-\psi(t))=a(t)f(t,u(t))。$$

因此下面将重点研究边值问题(7)的解。

设 X,K 及 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<r\}$，$\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<R\}$，其中 r 见(I_6)且 $R>r>0$ 是待定的正常数。

其次，令 $A:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to X$ 定义如下：

$$(Ay)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)f^*(t,y_1(\tau)-\psi(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1]。$$

易知 $A(K)\subset K$ 和 A 全连续。

先证

$$\|Ay\|<\|y\|,K\cap\partial\Omega_1。\tag{9}$$

为此，令 $y\in K\cap\partial\Omega_1$，则 $\|y\|=\|y\|_{[0,1]}=r$ 且 $r\geqslant y(t)\geqslant\Delta q(t)r$，$t\in[0,1]$。对上述 $t\in[0,1]$，有：

$$r\geqslant y(t)>y(\tau)-\psi(\tau)\geqslant\Delta q(t)r-e(t)\omega(t)=\Delta q(t)\left(r-\frac{Mc_0}{\Gamma(\alpha)}\right)>0。$$

故

$$(Ay)(t)\leqslant\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)f^*(t,y_1(\tau)-\psi(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{M_0K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[g\left(\Delta\left(r-\frac{Mc_0}{\Gamma(\alpha)}\right)\right)\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\right]^{q-1}\cdot\int_0^1 k(s)\varphi_q\left(\int_0^1 a(\tau)H(s,\tau)g(q(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{a_0M_0K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[g\left(\Delta\left(r-\frac{Mc_0}{\Gamma(\alpha)}\right)\right)\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\right]^{q-1}。$$

由(I_6)可得 $\|Ay\|\leqslant r=\|y\|$，因此(9)式成立。

下证

$$\| Ay \| > \| y \|, K \cap \partial\Omega_2 \tag{10}$$

为此令 $y \in K \cap \partial\Omega_2$，则 $\| y \| = \| y \|_{[0,1]} = R$ 且 $R \geqslant y(t) \geqslant \Delta\, q(t) R$，$t \in [0,1]$。同时对 $t \in [0,1]$ 有：

$$R \geqslant y(t) > y(t) - \psi(t) \geqslant \Delta\, q(t) R \left(1 - \frac{Mc_0}{R\Gamma(\alpha)}\right) \geqslant \Delta\, q(t) R\varepsilon。$$

当 $t \in [\theta, 1-\theta]$ 时，$y(\tau) - \psi(\tau) \geqslant \Delta\, \theta^{\alpha} R\varepsilon$，则当 $t \in [\theta, 1-\theta]$ 时，有

$$(Ay)(\sigma) \geqslant \int_{\theta}^{1-\theta} G(\sigma, s) \varphi_q \left\{ \int_0^1 a(\tau) H(s,\tau) g_1(y(\tau) - \psi(\tau)) \cdot \left(1 + \frac{h_1(y(\tau) - \psi(\tau))}{g_1(y(\tau) - \psi(\tau))}\right) \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}s \geqslant$$

$$\left[g_1(R) \left(1 + \frac{h_1(\Delta\, \theta^{\alpha} R\varepsilon)}{g_1(\Delta\, \theta^{\alpha} R\varepsilon)}\right) \right]^{q-1} \cdot \int_{\theta}^{1-\theta} G(\sigma, s) \varphi_q \left(\int_0^1 a(\tau) H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s。$$

再由(I_8)可得$(Ay)(\sigma) \geqslant R = \| y \|$，因此$\| Ay \| \geqslant \| y \|$，即(10)式成立。

由引理 3 可知 A 至少有一个不动点 $y \in K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$，即 $r \leqslant \| y \| = \| y \|_{[0,1]} \leqslant R$，且 $y_1(t) \geqslant \Delta\, q(t) r$，$t \in [0,1]$。因此 $y_1(t)$是(7)式的一个解且有 $y(t) > \psi(\tau)$，$t \in (0,1)$。

综上，当 $t \in (0,1)$时，边值问题(1)有一个满足(8)式的正解 $u(t)$。　证毕

例 2　考虑边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{3}{2}} (\varphi_p (D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(t))) = u^{-a}(t) + u^b(t) - 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \\ \varphi_p (D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(0)) = (\varphi_p (D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(1)))' = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

其中 $t \in (0,1)$，$a_0 = \int_0^1 k(s) \varphi_q \left(\int_0^1 a(\tau) H(s,\tau) g(q(\tau)) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s < \infty$，且满足

$$Mc_0 + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2^{q-1} a_0 M_0}{\Gamma(\alpha)} \right)^{-a} \leqslant 1。 \tag{12}$$

则(11)式有解 $u(t) > 0$。

证明　令 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，$R > 1$ 且满足：

$$1 - \frac{Mc_0}{R\Gamma(\alpha)} \geqslant \frac{1}{2}, g(u) = g_1(u) = u^{-a}, h(u) = h_1(u) = u^b,$$

$$c_0 = \frac{M_0^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \varphi_q \left(\int_0^1 a(\tau) H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s, K_0 = 1, e(t) = t^{-\frac{1}{2}}, a(t) = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, \theta = \frac{1}{4}。$$

可证(I_1)～(I_5)和(I_7)成立。

当 $r=1$ 时，由条件(12)有$\frac{a_0 M_0 K_0^{q-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{a_0 M_0}{\Gamma(\alpha)} \leqslant 2^{1-q} [\Delta(r - Mc_0)]^a \leqslant \left\{ g[\Delta(r - Mc_0)] \left[1 + \frac{h(r)}{g(r)} \right] \right\}^{1-q} \cdot r$，故($\mathrm{I}_6$)成立。

又注意到存在 R，有$\left(g_1(R_i) \left[\frac{g_1(\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R_i) + h_1(\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R_i)}{g_1(\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R_i)} \right] \right)^{-(q-1)} \cdot R_i = \frac{R_i^{1+a}}{[1 + (\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R)^{a+b}]^{q-1}}$。且有

$$\lim_{R_1 \to 0} R_1^{1+a} (1 + (\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R_1)^{a+b})^{-(q-1)} = \lim_{R_2 \to \infty} R_2^{1+a} (1 + (\Delta\, \varepsilon\theta^{\frac{7}{2}} R_2)^{a+b})^{-(q-1)} = 0,$$

其中 $0 < a < 1 < b$。

综上，满足定理 4 所有条件，故边值问题(11)至少存在一个解。　证毕

参考文献：

[1] Taliaferro S. A nonlinear singular boundary value problem [J]. Nonlinear Anal，1979，3：897-904.

[2] Bai Z B，Lü H S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. J Math Anal Appl，2005，311：495-505.

[3] Bai Z B，Qiu T T. Existence of positive solution for singular fractional differential equation[J]. Applied Mathematics and Computatio，2009，215：2761-2767.

[4] Han Z L，Lu H L，Zhang C. Positive solutions for value problems of fractional differential equation with generalized p-Laplacian[J]. Applied Mathematics and Computation，2015(257)：526-536.

[5] 刘刚,胡卫敏,张稳根.非线性分数阶微分方程边值问题多重正解的存在性[J].云南大学学报:自然科学版,2012,34(3):258-264.
Liu G, Hu W M, Zhang W G. The existence of multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. Journal of Yunnan University: Natural Science, 2012, 34(3): 258-264.
[6] Kilbas A A, Srivastave H H, Trujillo J J. Theory and applycations of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
[7] 白占兵.分数阶微分方程边值问题理论与应用[M].北京:中国科学技术出版社,2013:95-97.
Bai Z B. Fractional differential equation boundary value problems of theory and application[M]. Beijing: China Science & Technology Press, 2013: 95-97.
[8] 张爱华,胡卫敏.一类分数阶脉冲微分方程边值问题的多多重正解[J].济南大学学报:自然科学版,2014,111(3):235-241.
Zhang A H, Hu W M. Multiple positive solutions for aclass of boundary value problem of pmpulsive fractional differential equations[J]. Journal of University of Jinan: Sci & Tech, 2014, 28(3): 235-240.
[9] 许晓婕,胡卫敏.一个新的分数阶微分方程边值问题正解的存在性结果[J].系统科学与数学,2012,32(5):580-590.
Xu X J, Hu W M. A new existence result of positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equation boundary value problems[J]. J Sys Sci Math Scis, 2012, 32(5): 580-590.
[10] 刘洋,巴哈尔古力,胡卫敏.一类分数阶微分方程边值问题三重正解的存在性[J].数学的实践与认识,2013,43(6):228-234.
Liu Y, Bahaerguli, Hu W M. Triple Positive solution for boundary value problem of nonlinear fractional functional differential equations[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(6): 228-234.
[11] Yao Q. Positive solutions for Eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(2): 237-243.
[12] Xu X J, Jiang D Q, Yuan C J. Multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. Nonlinear Analysis Seres A: Theory, Methods and Applications, 2009, 71: 4676-4688.
[13] Li C F, Luo X N, Zhou Y. Existence of positive solutions of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59: 1363-1375.
[14] Ahmada B, Nieto J J. Existence result for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58: 1838-1843.
[15] Chen T, Liu W. An anti-periodic boundary value problem for fractional differential equation with p-Laplacian operator[J]. Appl Math Lett, 2012, 25: 1671-1675.
[16] Chai G. Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equation with p-Laplacian operator[J]. Bound Value Probl, 2012(2012): 1-18.

Existence of Solutions for Singular Boundary Value Problems with *p*-Laplacian Operators

WANG Hexiang[1], HU Weimin[2]

(1. School of Mathematics and Statistic, Kashgar University, Kashgar Xinjiang 844006;
2. School of Mathematics and Statistic, Yili Normal University, Yili Xingjiang 835000, China)

Abstract: With the properties of the Green function, the utilization of Kranoselskii fixed point theorem, the existence for positive solutions of one class singular equation's boundary value problem with p-Laplacian operator was studied when the equation is pesitone and semipesitone respectively, which presents the sufficient condition of the existence for positive solutions and examine the efficiency for the results via examples.

Key words: fractional boundary value problem; p-Laplacian operator; Singular positone and semipositone; Kranoselskii fixed point theorem

(责任编辑 黄 颖)