2016 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2016
第 33 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 33 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20160602

二阶 Robin 问题正解的存在性与多解性*

龙 严

(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要:考虑了二阶 Robin 边值问题$\begin{cases}u''(t)+f(u'(t))=0\\u(0)=u'(1)=0\end{cases}$,$t\in[0,1]$正解的存在性及多解性，其中 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$为连续函数。在合适的假设条件下,运用锥上的不动点理论,并通过相关引理讨论了该边值问题正解的存在性,证明了在条件 $f_0=f_\infty=\infty$ 或 $f_0=f_\infty=0$ 下,该边值问题至少有两个正解 x_1,x_2,使得 $0<|x_1|<p<|x_2|$,其中 $p>0$ 为一个常数。

关键词:Robin 问题;正解;存在性;多解性;不动点指数

中图分类号:O175.8 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)06-0089-04

1 预备知识

自 1893 年 Picard 运用迭代法讨论非线性二阶常微分方程两点边值问题解的存在性和惟一性之后，常微分方程两点边值问题引起了许多学者的关注，并得到了一些重要结果。在这些结果中有一部分是研究环域上半线性椭圆方程边值问题的,例如方程：

$$\begin{cases}\Delta u+g(|x|)f(u)=0, R_1<|x|<R_2\\ u=0, |x|=R_1\\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=0, |x|=R_2\end{cases}, x\in\mathbf{R}^N, N\geqslant 2,$$

可通过变换 $s=-\int_r^{R_2}\frac{1}{t^{N-1}}\mathrm{d}t$ 和 $t=\frac{m-s}{m}$ 将其转化为二阶 Robin 问题：

$$\begin{cases}z''(t)+h(t)f(z(t))=0\\ z(0)=z'(1)=0\end{cases}, t\in(0,1)。$$

由此可以看出 Robin 问题对解决常微分方程边值问题意义重大。

在研究常微分方程边值问题时常用到的方法有不动点指数理论[1-8]、上下解方法[11-12]等。特别地,1994 年 Erbe、王海燕[1]在条件 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$,$a\in C([0,\infty),[0,\infty))$,以及对于$(0,1)$的任一子区间内 $a(t)$不恒为 0,$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 且 $\rho:=\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$ 下构造锥:$K=\{u\in C[0,1]:u(t)\geqslant 0, \min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant M\|u\|\}$,然后运用锥上的不动点理论获得了二阶边值问题：

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)f(u)=0\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0\end{cases}, t\in(0,1)$$

在非线性项满足超线性与次线性条件下正解的存在性。2009 年,邹玉梅、崔玉军[2]在满足条件当 $f\in[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$连续时构造锥:$P=\{x(t)\in C[0,1]\,|\,x(t)\geqslant 0, t\in[0,1], x$ 在$[0,1]$上是凸的,$x(0)=x(1)=0\}$,然后运用锥上的不动点理论获得了二阶边值问题：

$$\begin{cases}x''(t)+f(t,x,x')=0\\ x(0)=x(1)=0\end{cases}, t\in(0,1),$$

* **收稿日期**:2016-03-08 **修回日期**:2016-09-22 **网络出版时间**:2016-11-02 13:34

作者简介:龙严,女,研究方向为常微分方程边值问题,E-mail:m18298408928@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1334.060.html

正解的存在性。

注意到文献[1-2]都是在空间 $C[0,1]$中先构造锥，然后运用锥上的不动点定理研究了相应问题正解的存在性。一个有趣的问题是：当非线性项上含有导数时能否在空间 $C^1[0,1]$中构造一个锥，进而使用不动点指数理论来研究问题正解的存在性与多解性。本文将尝试考虑问题：

$$\begin{cases}u''(t)+f(u'(t))=0\\ u(0)=u'(1)=0\end{cases},t\in[0,1] \tag{1}$$

正解的存在性与多解性。

为方便起见，记 $f_0:=\lim\limits_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}$，$f_\infty:=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}$。

本文假定：

(H1)$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$连续；

(H2)存在 $p>0,\eta\in(0,1)$，使得当 $0\leqslant s\leqslant p$ 时有 $f(s)\leqslant\eta p$；

(H3) 存在 $p>0$，使得 $f(s)\geqslant 2p$。

本文主要结果如下：

定理 1 假定(H1)成立，若 f 满足下列条件之一：1)超线性。$f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$；2)次线性。$f_0=\infty$且 $f_\infty=0$。则边值问题(1)至少存在一个正解。

定理 2 假定(H1)、(H2)成立，且 $f_0=f_\infty=\infty$，那么问题 (1) 至少存在两个正解 x_1,x_2，使得 $0<|x_1|<p<|x_2|$。

定理 3 假定(H1)、(H3)成立，且 $f_0=f_\infty=0$，那么问题 (1) 至少存在两个正解 x_1,x_2，使得 $0<|x_1|<p<|x_2|$。

令 $X=\{u\in C^1[0,1]\,|\,u(0)=u'(1)=0\}$，则其按范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u'(t)|$ 构成 Banach 空间，定义锥：$K=\{u\in C^1[0,1],u'\geqslant 0,u$ 在$[0,1]$上是向上凸的$,u(0)=u'(1)=0\}$。

容易验证锥 K 中的元素 u 满足：

$$\min_{\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1}|u'(t)|\geqslant\frac{1}{2}\|u\|。 \tag{2}$$

引理 1 u 是问题 (1) 的解当且仅当 u 是算子方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(u'(s))\mathrm{d}s:=Au(\mathrm{t}),t\in[0,1], \tag{3}$$

的解。其中 $G(t,s)$为边值问题$\begin{cases}u''=0\\ u(0)=u'(1)=0\end{cases}$的 Green 函数，具体地 $G(t,s)=\begin{cases}\mathrm{s},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ t,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$。

引理 2 算子 A 全连续，且 $AK\subseteq K$。

证明 $u'(t)=\int_t^1 f(u'(s))\mathrm{d}s\geqslant 0$，$u''(t)=-f(u'(t))\leqslant 0$，故 $AK\subseteq K$。由 f 的连续性及 Arzela-Ascoli 定理可知 $A:K\to K$ 是全连续算子。 证毕

引理 3[10] 设 X 为 Banach 空间，$K\subseteq X$ 是 X 中的一个锥。定义 $K_p=\{x\in K\,|\,|x|\leqslant p\}$，$p>0$。假设 $A:K_p\to K$ 是紧算子，且对 $x\in\partial K_p=\{x\in K\,|\,|x|=p\}$，有 $Ax\neq x$。

1) 若对 $x\in\partial K_p$，有$|x|\leqslant|Ax|$成立，则 $i(A,K_p,K)=0$。

2) 若对 $x\in\partial K_p$，有$|x|\geqslant|Ax|$成立，则 $i(A,K_p,K)=1$。

2 主要结果的证明

证明(定理 1) 1) 超线性情形。

因为 $f_0=0$，取 $H_1>0$，使得对 $0\leqslant u'\leqslant H_1$ 有 $f(u')\leqslant\eta u'$，其中 $\eta>0$ 满足 $\eta(1-t)\leqslant 1,t\in[0,1]$。因此 $u\in K$，$\|u\|=H_1$，则 $u'(t)=\int_t^1 f(u'(s))\mathrm{d}s\leqslant\eta\int_t^1 u'(s)\mathrm{d}s\leqslant\eta\|u\|(1-t)\leqslant\|u\|$。记 $\Omega_1:=\{u\in X:\|u\|<H_1\}$，则 $\|\mathrm{A}u\|\leqslant\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_1$。

又因为 $f_\infty=\infty$，存在 $\hat{H}_2>0$，使得对 $u'>\hat{H}_2$ 有 $f(u')\geqslant 4u'$。记 $H_2=\max\{2H_1,2\hat{H}_2\}$，$\Omega_2:=\{u\in X:$

$\| u \| < H_2\}$，则 $u'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u'(s))\mathrm{d}s \geqslant 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\| u \| \int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}s = \| u \|$。故 $\| Au \| \geqslant \| u \|$，$u \in K \cap \partial\Omega_2$。

所以，由引理 3 可知：算子 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 上有一个不动点，并有 $H_1 \leqslant \| u \| \leqslant H_2$。进而由 $G(t,s) > 0$ 得，$u(t) > 0$，$t \in (0,1)$。

2）次线性情形。

因为 $f_0 = \infty$，取 $H_1 > 0$，使得对 $0 \leqslant u' \leqslant H_1$ 有 $f(u') \leqslant \hat{\eta} u'$，其中 $\hat{\eta} \geqslant 4$ 则对 $u \in K$，$\| u \| = H_1$，有 $u'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u'(s))\mathrm{d}s \geqslant \hat{\eta}\int_{\frac{1}{2}}^{1} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant \hat{\eta}\frac{1}{4}\| u \| \geqslant \| u \|$。记 $\Omega_1 := \{u \in X: \| u \| < H_1\}$，则 $\| Au \| \geqslant \| u \|$，$u \in K \cap \partial\Omega_1$。

又因为 $f_\infty = 0$，存在 $\hat{H}_2 > 0$，使得对 $u' > \hat{H}_2$ 有 $f(u') \leqslant \lambda u'$，其中 $\lambda > 0$ 满足 $(1-t)\lambda \leqslant 1$。考虑以下两种情形：

若 f 有界，即存在 M，使得 $\forall u' \in (0,\infty)$ 有 $f(u') \leqslant M$，取 $H_2 := \max\{2H_1, (1-t)M\}$ 使得对 $u \in K$，$\| u \| = H_2$ 有 $u'(t) = \int_t^1 f(u'(s))\mathrm{d}s \leqslant M(1-t) = \| u \|$，所以 $\| Au \| \leqslant \| u \|$。

若 f 无界，取 $H_2 > \max\{2H_1, \hat{H}_2\}$ 使得 $f(u') \leqslant f(H_2)$，$0 < u' \leqslant H_2$，则对 $u \in K$，$\| u \| = H_2$ 有

$$u'(t) = \int_t^1 f(u'(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_t^1 f(H_2)ds \leqslant \lambda H_2\int_t^1 \mathrm{d}s \leqslant H_2 = \| u \|。$$

所以无论何种情况，只要令 $\Omega_2 := \{u \in X: \| u \| < H_2\}$ 就有 $\| Au \| \leqslant \| u \|$，$u \in K \cap \partial\Omega_2$。由引理 3 可知，边值问题（1）有一个正解。　　证毕

证明（定理 2）　不妨令

$$M > 4, \tag{4}$$

由 $f_0 = f_\infty = \infty$ 与定理 1 中的结论 2)，若存在 $r > 0$，$r < p$ 且 $0 < u' \leqslant r$ 满足 $f(u') \geqslant Mu'$。事实上 $\| Au \| \geqslant u'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u'(s))\mathrm{d}s \geqslant M\int_{\frac{1}{2}}^{1} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{4}M\| u \| \geqslant \| u \|$。因此，由引理 3 得

$$i(A, K_r, K) = 0。\tag{5}$$

对同样满足（4）的 M，由 $f_0 = f_\infty = \infty$ 可知，存在 $R_1 > 0$，使得 $f(u') \geqslant Mu'$，$\forall u' \geqslant R_1$。令 $R > \max\{p, 2H_1\}$，因此对 $u' \in \partial K_R$，有 $\| Au \| \geqslant u'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u'(s))\mathrm{d}s \geqslant M\int_{\frac{1}{2}}^{1} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{4}M\| u \| \geqslant \| u \|$，因此，由引理 3 得

$$i(A, K_R, K) = 0。\tag{6}$$

另一方面，由(H2)可知，对 $u' \in \partial K_p$ 有

$$\| Au \| = \left\| \int_0^1 G(t,s) f(u'(s))\mathrm{d}s \right\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_t^1 f(u'(s))\mathrm{d}s \leqslant \eta \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_t^1 \| u \| \mathrm{d}s \leqslant \eta \| u \| < \| u \|。$$

因此，由引理 3 得

$$i(A, K_p, K) = 1。\tag{7}$$

从而由(5)～(7)式可得

$$i(A, K_R \setminus K_p, K) = -1,\ i(A, K_p \setminus K_r, K) = 1,$$

因此，A 在 $K_R \setminus K_p$ 上有一个不动点 x_1，在 $K_p \setminus K_r$ 上有一个不动点 x_2，这都是边值问题（1)的解，并且 $x_1(t) > 0$，$x_2(t) > 0$，$t \in (0,1)$。

证明（定理 3）　由 $f_0 = f_\infty = 0$，$\forall \varepsilon > 0$ 使得 $f(u') \leqslant M + \varepsilon u'$。$\forall u' \geqslant 0$，$t \in [0,1]$，那么 $(Au)'(t) \leqslant \int_t^1 f(u' + \varepsilon)\mathrm{d}s$。因此，令 ε 足够小，$R > p$ 足够大，有 $\| Au \| < \| u \|$，$u \in \partial K_R$。故由引理 3 得

$$i(A, K_R, K) = 0。\tag{8}$$

同样地，对 $0 < r < p$，有

$$i(A, K_r, K) = 1。\tag{9}$$

另一方面，由(H3)，对 $u' \in \partial K_p$，有 $\| Au \| \geqslant u'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u'(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2p\mathrm{d}s = p = \| u \|$。因此，由引理 3 得

$$i(A, K_p, K) = 0。 \tag{10}$$

从而由(8)～(10)式得 A 有两个不动点，则边值问题 (1) 有两个正解。 证毕

致谢:本文撰写得到了国家自然科学基金(No. 11671322)及天元基金(No. 11626016)的资助,特此表示感谢!

参考文献:

[1] Erbe L H, Wang H Y. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1994, 120(3): 743-748.

[2] Zou Y, Cui Y. Positive solutions of second boundary value problems with dependence on the first order derivative[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2009, 32(1): 106-111.

[3] Erbe L H, Hu S, Wang H Y. Multiple positive solution of some boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 184: 640-648.

[4] Ma R. Existence of positive radial solutions of elliptic systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 201: 375-386.

[5] Jiang L. Existence and multiplicity of positive solutions of a class of fourth-order four-point boundary value problems [J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science Edition, 2013, 36(6): 830-835.

[6] Fink A M, Gatica J A. Positive solutions of second order systems of boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1993, 180: 93-108.

[7] Wang H Y. On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in the annulus[J]. Journal of Differential Equations, 1994, 109: 1-7.

[8] Lian X G. Existence of positive solutions for robin boundary value problems of second-order O. D. E. [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(21): 184-189.

[9] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. Springer: New York, 1995.

[10] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. Academic Press: Orlando, FL, 1988.

[11] Rachůnková I. Upper and lower solutions and topological degree[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 234: 311-327.

[12] Rachůnková I. Upper and lower solutions and multiplicity results[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 246: 446-464.

Effects of Existence and Multiplicity of Positive Solutions of a Second Order Robin Problem

LONG Yan

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The existence and multiplicity of positive solutions of a second order Robin problem were studied $\begin{cases} u''(t) + f(u'(t)) = 0 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$, $t \in [0,1]$, where $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ is continuous. The proof of the main results is based on the fixed point index theory and some relevant lemmas. On the condition of $f_0 = f_\infty = \infty$ or $f_0 = f_\infty = 0$, the boundary value problem has at least two positive solutions x_1, x_2 such that $0 < |x_1| < p < |x_2|$, where $p > 0$ is a constant.

Key words: Robin problem; positive solutions; existence; multiplicity; fixed point index

(责任编辑 许 甲)