2017 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2017
第 34 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 34 No. 1

运筹学与控制论——2016 年度重庆市出版专项基金 DOI:10.11721/cqnuj20170114

广义凸函数的上图与水平集*

黄金莹[1],张效霏[2],赵 宇[1],李 东[1],刘春妍[1],方秀男[1],康兆敏[1]

(1. 佳木斯大学 理学院数学系,黑龙江 佳木斯 154007;2. 广西大学 数学与信息学院,南宁 530000)

摘要:【目的】对于广义凸集与广义凸函数的研究是十分基础而重要的课题,只有广义凸性的基础理论研究不断完善,对广义凸规划的全面深入的研究才会成为可能。【方法】受凸函数的一个基本结果启发,给出概念并借助相关结果开展论证。【结果】简化了已有文献所给出的广义凸函数概念,指出函数的广义凸性与函数上图的广义凸性之间的等价关系,并给出下半连续前提下,F-G 广义凸函数与 F-G 广义弱凸函数之间等价性的新证明。最后,指出函数的广义凸性与函数水平集的广义凸性之间的内在联系。【结论】将广义凸集和广义凸函数统一在一个结构框架下进行研究,建立了二者之间的桥梁纽带。

关键词:广义凸函数;广义凸结构;广义凸集;上图;水平集

中图分类号:O174.13 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)01-0001-06

关于广义凸集及广义凸函数的研究是十分基础而重要的课题。文献[1]对凸集概念做了推广,在给出广义凸结构的概念和性质基础上,定义了关于广义凸结构 F 的凸集、近似凸集、弱凸集 3 种广义凸集概念,并给出了这 3 种广义凸集等价刻画。研究广义凸集的目的是为了更加细致地研究广义凸函数,将凸分析中关于凸函数的一些结果推广到广义凸函数。

从现有文献看,下面关于凸函数的一个基本结果还未统一推广到广义凸函数。

f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)=\{(\boldsymbol{x},\alpha)\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha\}$ 是凸集[2-3]。

文献[1,6-7]已经将上述结论推广到预不变(拟)凸函数。

文献[1]中广义凸结构的概念是由文献[4-5]中 F-G 广义凸函数概念提炼得到的,基于这一点,本文在文献[1]的基础上,简化文献[4-5]的 F-G 广义凸函数概念。在广义凸结构这一概念背景下,容易建立函数广义凸性与其上图的广义凸性之间的等价关系,从而将上述凸函数结论推广到 F-G 广义凸函数。此外,本文还推广了凸函数的水平集 $S_\eta(f)=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in K, f(\boldsymbol{x})\leqslant\eta\}$,$\forall\eta\in\mathbf{R}$ 也是凸集这一结论,并利用广义凸函数上图和水平集的结果,研究了广义凸函数的若干性质。

1 预备知识

定义 1[1] 设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$。称 F 是 K 上的广义凸结构,如果 F 满足以下 4 个条件:

1) $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall\boldsymbol{x}\in K$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{x}$(单点性);

2) $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)\in K$,$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)\in K$(端点性);

3) 对 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\alpha<\beta$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有:

(a) 条件 P_1:当 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta)\in K$ 时,$F\left[\boldsymbol{y},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta),1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right]=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)$;

(b) 条件 P_2:当 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)\in K$ 时,$F\left[\boldsymbol{x},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha),\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta)$;

* **收稿日期:**2015-07-06 **修回日期:**2016-12-26 **网络出版时间:**2017-01-12 11:29

资助项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(No. 12531684)

第一作者简介:黄金莹,男,教授,研究方向为凸分析与凸规划,E-mail:hjyshuxue@163.com;**通信作者:**张效霏,讲师,E-mail:nierszhang@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1129.018.html

4) F 关于 λ 在 $[0,1]$ 上连续(λ 连续性)。

定义2 设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,$F$ 是 K 上的广义凸结构,则:

1) 称 K 是关于 F 的凸集,如果 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$;

2) 称 K 是关于 F 的近似凸集,如果 $\exists\lambda\in(0,1)$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$;

3) 称 K 是关于 F 的弱凸集,如果 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\exists\lambda\in(0,1)$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$。

引理1 设 F 是 K 上的广义凸结构,且 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_1)\in K$,$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_2)\in K$,其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$u_1,u_2\in[0,1]$,则对 $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_1),F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_2),\lambda]$。

引理2 K 是闭的关于 F 的弱凸集,则 K 是关于 F 的凸集。

引理3 设 F 是 K 上的广义凸结构,则 K 是关于 F 的近似凸集当且仅当 T 在 $[0,1]$ 中稠密。其中 $T=\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K,\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K\}$。

2 广义凸函数的概念

约定:对于"$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的凸集",这里的 D 代表 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,+\infty)$。"实值函数 $f:K\to D$"含义是"n 元函数 f 的定义域是 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,值域含于 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,+\infty)$"。D 代表 $(-\infty,+\infty)$ 还是 $(0,+\infty)$ 要依据 G 的形式来确定。

定义3 设 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的凸集,称 G 在 D 上是正规的,如果 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall s_1,s_2,t_1,t_2\in D$,且 $s_1\leqslant s_2$,$t_1\leqslant t_2$,有 $G(s_1,t_1,\lambda)\leqslant G(s_2,t_2,\lambda)$,并且 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall s,t\in D$ 有 $\min\{s,t\}\leqslant G(s,t,\lambda)\leqslant\max\{s,t\}$。

定义4 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集,实值函数 $f:K\to D$ 满足条件 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有 $f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),0]$,$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1]$。

1) 称 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数,如果

$$\forall\lambda\in(0,1),\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\text{有 } f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda];\tag{1}$$

2) 称 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数,如果

$$\exists\lambda\in(0,1),\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\text{有 } f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda];\tag{2}$$

3) 称 f 是 K 上的 F-G 广义弱凸函数,如果

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\exists\lambda\in(0,1),\text{有 } f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda]。\tag{3}$$

注1 F-G 广义凸函数简称为广义凸函数,其特例很多[4]。下面仅给出拟凸函数的定义。

在定义2中,若取 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$,$G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$,则有特例:设 K 为凸集,$f:K\to\mathbf{R}$,称 f 是 K 上的拟凸函数[8-9],如果 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有 $f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$。近似拟凸函数与弱拟凸函数可以按照定义4相应生成。

此外定义4中条件:

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\text{有 } f[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda],f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1]$$

在后面叙述中被称为 f 在 K 上具有 F-G 端点广义凸性(简称端点广义凸性)。

注2 广义凸函数一定是广义近似凸函数,广义近似凸函数一定是广义弱凸函数,反之一般不成立。

例[8-9] 设 $\mathbf{Q}$ 为有理数集,$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{Q}\\1,\boldsymbol{x}\notin\mathbf{Q}\end{cases}$,则 $\exists\lambda\in(0,1)\cap\mathbf{Q}$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}$,有 $f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$。这说明 f 是 $\mathbf{R}$ 上的近似拟凸函数,但当 $\lambda\in(0,1)\setminus\mathbf{Q}$,总存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{Q}$,使得 $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$ 是无理数,从而 $f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})>\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$,这说明 f 不是拟凸的。

设 $f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\boldsymbol{x}=0\\0,\boldsymbol{x}\neq0\end{cases}$,则对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}$,$\exists\lambda\in(0,1)$,有 $f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$。这说明 f 是 $\mathbf{R}$ 上的弱拟凸函数,但对 $\forall\lambda\in(0,1)$,总存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}$,且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq0$,使得 $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}=0$,从而 $f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})>\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$,这说明 f 不是近似拟凸的。

3 广义凸函数的上图

接下来建立函数的广义凸性与其上图的广义凸性之间的等价关系,首先需要明确如下(4),(5)式。

实值函数 $f:K\to D$ 的上图记为:

$$\mathrm{epi}(f)=\{(\boldsymbol{x},\alpha)\mid \boldsymbol{x}\in K,f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha\}\tag{4}$$

令

$$(F\times G)(P,Q,\lambda)=(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),G(\alpha,\beta,\lambda))\tag{5}$$

其中 $P(\boldsymbol{x},\alpha),Q(\boldsymbol{y},\beta)\in\mathrm{epi}(f),\lambda\in[0,1]$。

定理 1　若 f 是 K 上的 F-G 广义(近似、弱)凸函数，则 $F\times G$ 是 $\mathrm{epi}(f)$上的广义凸结构。

证明　这里以验证 $F\times G$ 在 $\mathrm{epi}(f)$上满足定义 1 中的端点性来加以说明。对 $\forall P(\boldsymbol{x},\alpha),Q(\boldsymbol{y},\beta)\in\mathrm{epi}(f)$，有

$$(F\times G)(P,Q,0)=(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0),G(\alpha,\beta,0)),(F\times G)(P,Q,1)=(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1),G(\alpha,\beta,1))。$$

由 f 的端点广义凸性及 G 的正规性知，

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),0]\leqslant G(\alpha,\beta,0),f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1]\leqslant G(\alpha,\beta,1),$$

故$(F\times G)(P,Q,0)\in\mathrm{epi}(f)$，$(F\times G)(P,Q,1)\in\mathrm{epi}(f)$，这说明 $F\times G$ 在 $\mathrm{epi}(f)$上满足端点性。　　证毕

定理 2　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集，则

1) f 是 K 上的 F-G 广义凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集；

2) f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的近似凸集；

3) f 是 K 上的 F-G 广义弱凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的弱凸集。

证明　仅证 1)，同理可证 2)、3)。

由定理 1 知，$(F\times G)(P,Q,\lambda)$是 $\mathrm{epi}(f)$上的广义凸结构。任取 $P(\boldsymbol{x},\alpha),Q(\boldsymbol{y},\beta)\in\mathrm{epi}(f)$，则 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha$，$f(\boldsymbol{y})\leqslant\beta$。

当 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数时，对 $\forall\lambda\in(0,1)$，有 $f[(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda]\leqslant G(\alpha,\beta,\lambda)$，即$(F\times G)(P,Q,\lambda)=(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),G(\alpha,\beta,\lambda))\in\mathrm{epi}(f)$，据定义 2 知，$\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集。

反之，任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，则 $P(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})),Q(\boldsymbol{y},f(\boldsymbol{y}))\in\mathrm{epi}(f)$。当 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集时，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有$(F\times G)(P,Q,\lambda)=(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),G(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda))\in\mathrm{epi}(f)$，即 $f[(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda]$。据定义 4 知，$f$ 是 K 上的 F-G 广义凸函数。　　证毕

注 3　在定理 2 的结论 1)中，如果令

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K;G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t,\forall s,t\in\mathbf{R},$$

就得到本文开篇叙述的凸分析中的结论。

如果令

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K;G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t\text{ 或 }G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t,\forall s,t\in\mathbf{R},$$

就会分别得到文献[6]的定理 3 和文献[7]的定理 3.5：

$f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上的预不变拟凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)=\{(\boldsymbol{x},\alpha)\mid\boldsymbol{x}\in K,f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha\}$是 η-不变凸集(η-不变凸集的定义参见文献[6])。

$f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上的预不变凸函数当且仅当 $\mathrm{epi}(f)=\{(\boldsymbol{x},\alpha)\mid\boldsymbol{x}\in K,f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha\}$是 G-不变凸集(G-不变凸集的定义参见文献[7])。

由于函数的下半连续性等价于其上图的闭性，由此可得如下结论。

推论 1　若 $f:K\to D$ 是 K 上的下半连续函数，则 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数等价于 f 是 K 上的 F-G 广义弱凸函数。

证明　仅证充分性。由 f 是 K 上的 F-G 广义弱凸函数及定理 2 的结论 3)知，上图 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的弱凸集。

由 f 在 K 上的下半连续性知，$\mathrm{epi}(f)$是闭集，进而由引理 2 知，$\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集。

由定理 2 的结论 1)知，f 是 K 上的 F-G 广义凸函数。　　证毕

推论 2[1,5,10-11]　若 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上的下半连续函数，则 f 是 K 上的预不变(拟)凸函数当且仅当 f 是 K 上的弱预不变(拟)凸函数。

注 4[9]　上述推论 1 对于上半连续函数是不成立的，例如注 2 给出的 $f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\boldsymbol{x}=0\\0,\boldsymbol{x}\neq0\end{cases}$，显然 $f(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}$ 是上半连续，且 f 是 $\mathbf{R}$ 上的弱拟凸函数，但 f 不是拟凸函数。

定理 3 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数当且仅当 T^f 在$[0,1]$中稠密。其中

$$T^f=\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda],\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K\}。$$

证明 充分性根据定义4是显然的,下证必要性。

由定理2的结论2)知,当 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数时,$\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的近似凸集。再由引理3知,$T=\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],(F\times G)(P,Q,\lambda)\in\mathrm{epi}(f),\forall\,P(\boldsymbol{x},\alpha),Q(\boldsymbol{y},\beta)\in\mathrm{epi}(f)\}$在$[0,1]$中稠密。

因为

$$T^f=\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda],\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K\}=$$
$$\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],(F\times G)(P,Q,\lambda)\in\mathrm{epi}(f),\forall\,P(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})),Q(\boldsymbol{y},f(\boldsymbol{y}))\in\mathrm{epi}(f)\},$$

故 $T\subseteq T^f$,进而 T^f 在$[0,1]$中稠密。 证毕

与上述定理3相同或类似的结果几乎出现在所有研究半连续函数的广义凸性的文献中,本文的叙述和证明相对来说是简洁的。

4 广义凸函数的水平集

与上图类似的是函数的水平集,其广义凸性与函数自身的广义凸性也有密切的联系。

定理 4 若 f 是 K 上的 F-G 广义(近似、弱)凸函数,则 F 是 $S_\eta(f)$上的广义凸结构。

证明 仅验证 F 在 $S_\eta(f)$上满足定义1中的端点性。

对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_\eta(f)$,有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\eta,f(\boldsymbol{y})\leqslant\eta$。由 f 的端点广义凸性及 G 的正规性知,

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),0]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}\leqslant\eta,$$
$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}\leqslant\eta,$$

故 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)\in S_\eta(f),F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)\in S_\eta(f)$,这说明 F 在 $S_\eta(f)$上满足端点性。 证毕

定理 5 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集,则:

1) 若 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数,则对 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的凸集。

2) 若 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数,则对 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的近似凸集。

3) 若 f 是 K 上的 F-G 广义弱凸函数,则对 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的弱凸集。

证明 仅证1),同理可证2)、3)。

由定理4知,F 是 $S_\eta(f)$上的广义凸结构。任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_\eta(f)$,则 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\eta,f(\boldsymbol{y})\leqslant\eta$。

当 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数时,对 $\forall\,\lambda\in(0,1)$,有

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}\leqslant\eta。$$

即 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_\eta(f)$,据定义2知,$S_\eta(f)$是关于 F 的广义凸集。 证毕

文献[2]中将特取 $G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$ 和 $G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$ 的 F-G 广义凸函数分别称为 F 凸函数和 F 拟凸函数,对应的也有 F 近似(弱)凸函数和 F 近似(弱)拟凸函数的概念。

对于 F 拟凸函数来说上述命题还是充要的。

定理 6 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集,$f:K\to D$,则:

1) 若 f 是 K 上的 F 拟凸函数当且仅当 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的凸集。

2) 若 f 是 K 上的 F 近似拟凸函数当且仅当 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的近似凸集。

3) 若 f 是 K 上的 F 弱拟凸函数当且仅当 $\forall\,\eta\in\mathbf{R}$,$S_\eta(f)$是关于 F 的弱凸集。

证明 仅证1),同理可证2)、3)。

必要性。由定理5的结论1)直接得到。

充分性。$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,取 $\eta=\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$,由此得到的水平集 $S_\eta(f)=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in K,f(\boldsymbol{x})\leqslant\eta\}$为关于 F 的广义凸集,且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_\eta(f)$。

于是 $\forall\,\lambda\in[0,1]$,$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_\eta(f)$,即 $f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant\eta=\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$,故 f 是 K 上的 F 拟凸函数。 证毕

定理 7 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数当且仅当 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数和 F 拟凸函数。

证明 必要性是显然的,下证充分性。由定理2的结论1)知,只需证 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集。因 f 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数和 F 拟凸函数,由定理2的结论2)及定理6的结论1),分别有 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$

的近似凸集，$\forall \eta\in \mathbf{R}$，$S_\eta(f)$是关于 F 的凸集。

由引理 3 知，

$$T=\{\lambda \mid \lambda\in[0,1],(F\times G)(P,Q,\lambda)\in \mathrm{epi}(f),\forall P(\boldsymbol{x},\alpha),Q(\boldsymbol{y},\beta)\in \mathrm{epi}(f)\}$$

在$[0,1]$中稠密。

任意取定 $P(\boldsymbol{x},\alpha)$，$Q(\boldsymbol{y},\beta)\in \mathrm{epi}(f)$及 $\lambda\in(0,1)$，有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha$，$f(\boldsymbol{y})\leqslant\beta$，且$\exists \lambda_n\in T$，使得 $\lambda_n\to\lambda$。

令 $\eta_n=G(\alpha,\beta,\lambda_n)$，$\eta=G(\alpha,\beta,\lambda)$，则 $\eta_n\to\eta$，且

$$\min\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}\leqslant\min\{\alpha,\beta\}\leqslant G(\alpha,\beta,\lambda_n)=\eta_n, \tag{6}$$

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n)]\leqslant G(\alpha,\beta,\lambda_n)=\eta_n。 \tag{7}$$

讨论如下：

1) 当 $f(\boldsymbol{x})=\min\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$时，由(6)，(7)式知，$\boldsymbol{x}\in S_{\eta_n}(f)$，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n)\in S_{\eta_n}(f)$。因 $S_{\eta_n}(f)$是关于 F 的凸集，故对$\forall t\in(0,1)$，$F[\boldsymbol{x},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n),t]\in S_{\eta_n}(f)$。可令 $\lambda_n<\lambda$，特取 $t=\dfrac{\lambda-\lambda_n}{1-\lambda_n}$，由条件 P_2 知，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=F[\boldsymbol{x},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n),t]$，从而 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_{\eta_n}(f)$。

2) 当 $f(\boldsymbol{y})=\min\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$时，由(6)，(7)式知，$\boldsymbol{y}\in S_{\eta_n}(f)$，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n)\in S_{\eta_n}(f)$。因 $S_{\eta_n}(f)$是关于 F 的凸集，故对$\forall t\in(0,1)$，$F[\boldsymbol{y},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n),t]\in S_{\eta_n}(f)$。可令 $\lambda_n>\lambda$，特取 $t=1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}$，由条件 P_1 知，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=F[\boldsymbol{y},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_n),t]$，从而 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_{\eta_n}(f)$。

根据以上讨论，对任意 $P(\boldsymbol{x},\alpha)$，$Q(\boldsymbol{y},\beta)\in \mathrm{epi}(f)$及 $\lambda\in(0,1)$，总有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_{\eta_n}(f)$，即 $f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant\eta_n$。由 $\eta_n\to\eta$ 知，$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]\leqslant\eta$，即$(F\times G)(P,Q,\lambda)\in \mathrm{epi}(f)$。故 $\mathrm{epi}(f)$是关于 $F\times G$ 的凸集。　证毕

5 结论

以凸集与凸函数作为工具讨论最值问题是优化理论的核心内容之一。但随着优化理论研究的深入和现实问题的复杂化，人们发现问题并不总是以凸性的形式呈现，大量的非凸优化问题等待解决。解决方式之一是将凸向非凸去推广。推广过程中，国内外学者创建了大量的具体广义凸函数。

本文正是通过对这些广义凸函数共性的提炼，最终建立了以广义凸结构为背景的广义凸函数概念，将广义凸集和广义凸函数统一在一个结构框架下进行研究，建立了二者之间的桥梁纽带，由此不但可以得到广义凸函数已有性质的简洁叙述和证明，而且可以将凸函数的若干性质推广到广义凸函数，得到的新性质。

参考文献：

[1] 黄金莹，张效菲，赵宇. 广义凸集的结构理论[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(1)：6-12.
HUANG J Y，ZHANG X F，ZHAO Y. Structural theory of generalized convex sets[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2016，33(1)：6-12.

[2] BERTSEKAS D P. 凸优化理论(影印版)[M]. 北京：清华大学出版社，2011.
BERTSEKAS D P. Convex optimization theory (photocopy)[M]. Beijing：Tsinghua University Press，2011.

[3] ROCKAFELLAR R T. Convex analysis[M]. Princeton：Princeton University Press，1970.

[4] 黄金莹，赵宇，方秀男. *F-G* 广义凸函数与 *F* 拟凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2011，28(4)：1-5.
HUANG J Y，ZHAO Y，FANG X N. The *F-G* generalized convex and *F* quasi convex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2011，28(4)：1-5.

[5] 黄金莹，赵宇. 广义凸函数与弱近似凸集[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2011，28(2)：200-205.
HUANG J Y，ZHAO Y. Generalized convex functions and weak nearly convex sets[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University，2011，28(2)：200-205.

[6] 彭再云，刘亚威. 预不变拟凸函数的新性质及应用[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版)，2008，27(3)：496-498.
PENG Z Y，LIU Y W. New characteristics and application of prequasi-invex Functions[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)，2008，27(3)：496-498.

[7] YANG X M，LI D. Semistrictly preinvex functions[J]. J Math Anal Appl，2001，258：287-308.

[8] 杨新民. 上半连续函数的拟凸性[J]. 运筹学学报，1999，3(1)：48-51.
YANG X M. Quasiconvexity of upper semi-continuous functions[J]. OR TRANSACTIONS，1999，3(1)：48-51.

[9] 王兴国. 关于半连续性与拟凸函数的注记[J]. 浙江师大学报(自然科学版)，1999，22(2)：14-18.
WANG X G. Some remarks on semicontinuity and quasi-

convex functions[J]. Journal of Zhejiang Nor-mal University(Natural Science), 1999, 22(2): 14-18.

[10] YANG X M, LI D. On properties of preinvex functions [J]. J Math Anal Appl, 2001, 256: 229-241.

[11] 彭再云,秦春蓉. 用近似凸性研究预不变凸函数[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2006, 20(3): 14-16.
PENG Z Y, QIN C R. Study of preinvex functions by nearly convexity[J]. Journal of Gansu Lianhel University (Natural Science), 2006, 20(3): 14-16.

Operations Research and Cybernetics

Epigraph and Level Set of Generalized Convex Functions

HUANG Jinying[1], ZHANG Xiaofei[2], ZHAO Yu[1], LI Dong[1], LIU Chunyan[1], FANG Xiunan[1], KANG Zhaomin[1]

(1. Department of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007, China;
2. College of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: [**Purposes**] The study of generalized convex sets and generalized convex functions are very important, because the developments of generalized convex theory can provide the possible to study the generalized convex programming. [**Methods**] Some concepts and proofs were given by the results of convex functions. [**Findings**] First, the concepts of generalized convex functions were simplified and the equivalent relationships between generalized convexity of functions and epigraph were introduced. Second, base on the condition of lower semi-continuous, the new proof of equivalent relationships between *F-G* generalized convex and *F-G* generalized weakly convex functions was given. Last, the relationships between generalized convexity of functions and level sets were introduced. [**Conclusions**] Generalized convex sets and generalized convex functions were studied in a common structural framework, and a link was established between them.

Keywords: generalized convex functions; generalized convex structure; generalized convex sets; epigraph; level sets

(责任编辑 黄 颖)