运筹学与控制论——2016 年度重庆市出版专项基金　　DOI:10.11721/cqnuj20170120

线性约束多项式整数规划问题的全局最优性条件*

陈　露，李国权
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】带有线性等式约束的多项式整数规划问题有着广泛地实际应用，而且是 NP-难问题。全局最优性条件作为理论研究是对全局最优解进行刻画，同时也是设计算法的重要依据。【方法】利用罚函数方法对此进行讨论，并用数值例子进行验证。【结果】给出了一类带有线性等式约束的多项式整数规划问题的全局最优性条件，包括充分性条件和必要性条件。【结论】通过所给的数值例子说明可以利用所给的全局最优性条件来判断一个给定的点是否是全局极小点。

关键词:多项式整数规划；线性等式约束；全局最优性条件

中图分类号:O221.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)01-0007-05

1 预备知识

考虑如下带有线性约束的多项式整数规划问题(Polynomial integer optimization problems with linear constraints, LPOP)：

$$\min\ f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{m}b_i^{(k)}x_i^k+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$
$$\mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}=0, \boldsymbol{x}\in S_I,$$

其中 $S_I=\{(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\{u_i,u_i+1,\cdots,v_i\},i=1,2,\cdots,n\}$，$\boldsymbol{A}\in S^n$，$S^n$ 是 $n\times n$ 阶实对称矩阵构成的集合，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵，对 $\forall\, i=1,\cdots,n,k=3,\cdots,n,b_i^{(k)},u_i,v_i\in\mathbf{R}$ 且 $u_i<v_i$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$。

多项式规化问在工程设计、网络分布、通信管理以及选址分配问题等科学研究领域有着广泛的应用。此外，多项式规化问题还包含了一大类的优化问题，包括二次优化问题、组合优化问题及三次多项式优化问题等，所以关于多项式规划问题的研究成果就可以应用到这些优化问题上来。由于带有非负特征值的二次规划问题是 NP-难的，因此多项式规划问题也是 NP-难的。在实际应用中，许多组合优化问题的目标函数可以被描述为问题(LPOP)目标函数的形式，如三次多项式逼近问题[1]、工程设计问题[2]；并且一些著名测试函数的目标函数也属于该类问题目标函数的形式，如六峰值驼背函数优化问题、修正的四阶 De Jong 函数。近些年来，多项式规划问题的一些特殊形式得到研究。Billionneta 等人[3]利用 QCR 法求解了带有线性等式约束的二次{0,1}规划问题。在此基础上，他们在文献[4]中求解了带有线性约束和混合整数约束的二次规划问题；Aardal 等人[5]对一类整数线性等式系统问题进行了研究，而这些问题可以描述为问题(LPOP)的形式；李国权[6]利用罚函数的方法研究了带有线性等式约束二次整数规划问题的全局最优性条件；吴至友等人[7]研究了带有线性等式约束二次{0,1}规划问题的全局最优性条件，特别地，由于二次指派问题可以转化为带有线性等式约束二次{0,1}规划问题，从而也得到了二次指派问题的全局最优性条件；全靖等人[8]研究了一类多项式整数规划问题的全局最优性条件。

受上述文献的启发，利用罚函数的方法来研究一类带有线性等式约束多项式整数规划问题的全局最优性条件，所给出的充分条件和必要条件是比较容易验证的，并且推广了文献[6-7]中相应的一些结果。

* **收稿日期:**2016-01-08　**修回日期:**2016-06-18　**网络出版时间:**2017-01-12 11:29

资助项目:国家自然科学基金(No. 11471062;No. 11401064)；重庆市自然科学基金(No. cstc2013jcyjA-00021)；重庆市教委科技项目(No. KJ1500302)

第一作者简介:陈露，女，研究方向为最优化理论与算法，E-mail:1203702404@qq.com；**通信作者:**李国权，副教授，E-mail:ligq@cqnu.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1129.004.html

下面先给出文中所要用到的一些基本的结果与记号:$\mathbf{R}$ 表示实线性空间,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。对于向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$ 表示对 $\forall i=1,2,\cdots,n$,有 $x_i\geqslant y_i$,记号 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵。用 $\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$ 表示对角元素为 $q_1,\cdots,q_n$ 的对角矩阵。

首先考虑如下一类多项式整数规划问题 POP:

$$\min\ f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{m}b_i^{(k)}x_i^k+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$
$$\text{s. t. }\ \boldsymbol{x}\in S_I。$$

令 $\alpha_{\bar{x}_i}:=\min\left\{\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})_i+\sum\limits_{k=3}^{m}b_i^{(k)}(x_i^{k-1}+x_i^{k-2}\bar{x}_i+\cdots+x_i\bar{x}_i^{k-2}+\bar{x}_i^{k-1})}{(x_i-\bar{x}_i)},x_i\in\{u_i,u_i+1,\cdots,v_i\},x_i\neq\bar{x}_i\right\}$,$\alpha_{\bar{\boldsymbol{x}}}:=(\alpha_{\bar{x}_1},\cdots,\alpha_{\bar{x}_n})^{\mathrm{T}}$,则有如下引理。

引理 1[8] (问题(POP)的全局最优充分性条件)令 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$,若条件[SC1]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{\boldsymbol{x}}})\leqslant\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ 成立,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(POP)的全局极小点。

引理 2[8] (问题(POP)的全局最优必要性条件)若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$ 是问题(POP)的全局极小点,则条件[NC1]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{\boldsymbol{x}}})\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$ 成立,其中 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元生成的对角矩阵。

2 问题(LPOP)的全局最优性条件

考虑问题(LPOP)不失一般性,假设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的所有分量都是整数,并且问题(LPOP)的可行集 $S:=\{\boldsymbol{x}\in S_I\mid \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\}\neq\varnothing$,即问题(LPOP)的全局极小点存在。

对于问题(LPOP),定义 $F_\lambda(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\|^2$,其中 λ 是一个参数且 $\lambda>0$。可以将 $F_\lambda(\boldsymbol{x})$ 改写为:

$$F_\lambda(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{m}b_i^{(k)}x_i^k+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}。$$

考虑如下规划问题:

$$(F_\lambda)\ \min\ F_\lambda(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s. t. }\ \boldsymbol{x}\in S_I,$$

令 $f^*:=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in S}f(\boldsymbol{x})$,$\bar{f}:=\max\limits_{\boldsymbol{x}\in S_I}f(\boldsymbol{x})$,$\eta:=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in S_I\setminus S}\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\|^2$,$\underline{f}:=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in S_I}f(\boldsymbol{x})$,$\lambda_0:=\dfrac{2(f^*-\underline{f})}{\eta}$,则显然有 $f^*\geqslant\underline{f}$,$\eta\geqslant1$(因为假设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的所有分量都是整数且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$)且 $\lambda_0\geqslant0$。

接下来给出一个非常重要的定理,为问题(F_λ)与问题(LPOP)的全局最优解建立起了联系。

定理 1 若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$,$\lambda>\lambda_0$,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(F_λ)的全局极小点当且仅当 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(LPOP)的全局极小点。

证明 (必要性)假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(LPOP)的全局极小点,则 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 且 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$,$\forall\boldsymbol{x}\in S$。

下面证明 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 也是问题(F_λ)的全局极小点。

1) 对 $\forall\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$,有 $F_\lambda(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})=F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$,即 $F_\lambda(\boldsymbol{x})\geqslant F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$,$\forall\boldsymbol{x}\in S$。

2) 对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I\setminus S$,有 $F_\lambda(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\|^2\geqslant\underline{f}+\frac{\lambda}{2}\eta\geqslant f^*=f(\bar{\boldsymbol{x}})=F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$。

因此,$F_\lambda(\boldsymbol{x})\geqslant F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$,$\forall\boldsymbol{x}\in S_I$,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(F_λ)的全局极小点。

(充分性)反之,如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(F_λ)的全局极小点,则 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$ 且 $F_\lambda(\boldsymbol{x})\geqslant F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$,$\forall\boldsymbol{x}\in S_I$。

首先证明 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I$。事实上,若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S_I\setminus S$,则有 $\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\|^2\geqslant\eta$ 且

$$F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\|^2\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{\lambda}{2}\eta>f(\bar{\boldsymbol{x}})+f^*-\underline{f}\geqslant f^*。\tag{1}$$

假设 $\boldsymbol{x}^* \in S$ 是问题(LPOP)的全局极小点，则 $f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$，且由前半部分证明知道 $\boldsymbol{x}^*$ 也是问题$(F_\lambda)(\lambda > \lambda_0)$的全局极小点，所以

$$f^* = f(\boldsymbol{x}^*) = F_\lambda(\boldsymbol{x}^*)。\tag{2}$$

因此由(1)，(2)式可知，$F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}}) > F_\lambda(\boldsymbol{x}^*)$，这与$\bar{x}$是问题$(F_\lambda)$的全局极小点矛盾，因此$\bar{\boldsymbol{x}} \in S_I$。

综上所述，对任意的 $\boldsymbol{x} \in S$，有 $f(\boldsymbol{x}) = F_\lambda(\boldsymbol{x}) \geqslant F_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}}) = f(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\bar{\boldsymbol{x}}$即为问题(LPOP)的全局极小点。　　证毕

下面给出问题(LPOP)的全局最优性条件。

定理 2　(问题(LPOP)的全局最优充分性条件)令$\bar{\boldsymbol{x}} \in S$，$\lambda > \lambda_0$，若条件[SC2]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})$成立，则$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(LPOP)的全局极小点。

证明　令

$$\beta_{\bar{x}_i} := \min\left\{ \frac{(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{x}})_i + \sum_{k=3}^{m} b_i^{(k)} (x_i^{k-1} + x_i^{k-2}\bar{x}_i + \cdots + x_i \bar{x}_i^{k-2} + \bar{x}_i^{k-1})}{(x_i - \bar{x}_i)},\right.$$

$$\left. x_i \in \{u_i, u_i + 1, \cdots, v_i\}, x_i \neq \bar{x}_i \right\}, \beta_{\bar{\boldsymbol{x}}} := (\beta_{\bar{x}_1}, \cdots, \beta_{\bar{x}_n})^{\mathrm{T}}。$$

由引理 1 知，如果条件$-\mathrm{diag}(\beta_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})$成立，则$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题$(F_\lambda)$的全局极小点。

此外由$\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ 可知 $\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + c = \boldsymbol{0}$，从而有 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}$，故 $\beta_{\bar{x}} = \alpha_{\bar{x}}$。因此

$$-\mathrm{diag}(\beta_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow -\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}) \Rightarrow$$

$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(F_λ)的全局极小点$\Leftrightarrow$$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(LPOP)的全局极小点。　　证毕

推论 1　对于问题(LPOP)，当 $b_i^{(k)} = 0 (i = 1, \cdots, n, k = 3, \cdots, m)$时，令$\bar{\boldsymbol{x}} \in S$，$\lambda > \lambda_0$，若[SC3]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})$成立，则$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(LPOP)的全局极小点。

注 1　推论 1 的结论与文献[6]中定理 2.2.2 是一致的。

注 2　当 $b_i^{(k)} = 0, u_i = 0, v_i = 1 (i = 1, \cdots, n, k = 3, \cdots, m)$时，推论 1 与文献[7]中推论 1 是一致的。

定理 3　(问题(LPOP)的全局最优必要性条件)令 $\lambda > \lambda_0$，且$\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ 是问题(LPOP)的全局极小点，则条件[NC2]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})$成立。

定理 3 的证明方法与定理 2 的方法类似。

推论 2　对于问题(LPOP)，当 $b_i^{(k)} = 0 (i = 1, \cdots, n, k = 3, \cdots, m)$时，令 $\lambda > \lambda_0$ 且$\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ 是问题(LPOP)的全局极小点，则条件[NC3]$-\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B})$成立。

注 3　推论 2 与文献[6]中定理 2.2.3 是一致的。

注 4　假设问题(LPOP)的可行集 S 非空，因此方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 存在整数解，又因为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 是线性方程组，所以若能够通过求解该线性方程组顺利找到问题(LPOP)的任意一个可行点 $\boldsymbol{x}^*$，再由 $f(\boldsymbol{x}^*) \geqslant f^*$ 及 $\eta \geqslant 1$，令 $\lambda = 2(f(\boldsymbol{x}^*) - \underline{f}) + 1$，从而有 $\lambda > \frac{2(f^* - \underline{f})}{\eta} = \lambda_0$，但是在大多数情况下求解线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 求得的解并不是整数解或者并不可行。

注 5　由于 $f^* = \min_{x \in S} f(\boldsymbol{x}) \leqslant \max_{x \in S} f(\boldsymbol{x}) \leqslant \max_{x \in S_I} f(\boldsymbol{x})$，因此 $f^* \leqslant \hat{f}$，所以令

$$\lambda = 2(\hat{f} - \underline{f}) + 1 > \frac{2(f^* - \underline{f})}{\eta} = \lambda_0。$$

因此，在一般情况下如果要确定 λ_0 的值只需要利用文献[9]中给出的全局优化算法分别求出 $\min_{x \in S_I} f(\boldsymbol{x})$和

$\min_{x\in S_I} -f(\boldsymbol{x})$的全局极小值即可。

接下来将给出两个数值例子用以说明如何使用本节所给出的全局最优性条件来判断给定点是否是全局最优解,所给出的例子还表明满足全局最优必要性条件的点也可能不是全局最优解。

例 1 考虑如下规化问题

$$\text{(EP1)}\qquad \min f(x) = 3x_1^3 - x_1^4 - 4x_2^4 + 3x_2^5 + x_1^2 - 2x_2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - x_2,$$
$$\text{s.t. } x_1 - x_2 + 1 = 0, x_1, x_2 \in \{0,1,2\},$$

这里 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}=(2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=(1,-1)$。

将 $x_2=x_1+1$ 带入 $f(\boldsymbol{x})$消去 x_2,通过解如下规划问题

$$\min f(x) = 3x_1^5 + 10x_1^4 + 29x_1^3 + 6x_1^2 - x_1 - 1,$$
$$\text{s.t. } x_1 \in \{0,1,2\}。$$

得到问题(EP1)的全局最优解为$\bar{\boldsymbol{x}}=(0,1)^{\mathrm{T}}$,故 $f^*=-4$。通过计算得$\underline{f}=-4$,$\eta=1$,$\lambda_0=0$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=(0,-5)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_{\bar{x}_1}=2$,$\alpha_{\bar{x}_2}=6$,$\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda & -2-\lambda\\ -2-\lambda & -4+\lambda\end{pmatrix}$。

当 $\lambda>\lambda_0=0$ 时有 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+2\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}})=\begin{pmatrix}5+\lambda & -2-\lambda\\ -2-\lambda & 8+\lambda\end{pmatrix}\geqslant 0$,所以全局最优充分性条件[SC2]在$\bar{\boldsymbol{x}}$处成立,因此$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(EP1)的全局极小点。并且当 $\lambda>\lambda_0=0$ 时,$-\alpha_{\bar{x}_1}=-2\leqslant\dfrac{1+\lambda}{2}$,$-\alpha_{\bar{x}_2}=-6\leqslant\dfrac{-4+\lambda}{2}$,所以全局最优必要性条件[NC2]在$\bar{\boldsymbol{x}}$处也成立。

例 2 考虑如下规化问题

$$\text{(EP2)}\qquad \min f(x) = x_1^4 - x_2^3 - x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 - 9x_2,$$
$$\text{s.t. } x_1 - x_2 + 1 = 0, x_1, x_2 \in \{0,1,2\}。$$

这里 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}=(2,-9)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=(1,-1)$,通过计算知道 $f^*=-12$,$\underline{f}=-18$,$\eta=1$,$\lambda_0=12$。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=(4,1)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_{\bar{x}_1}=-5\alpha_{\bar{x}_2}=\dfrac{3}{2}$,$\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & 2-\lambda\\ 2-\lambda & 4+\lambda\end{pmatrix}$。

当 $\lambda>\lambda_0=12$ 时有$-\alpha_{\bar{x}_1}=5\leqslant\dfrac{-2+\lambda}{2}$,$-\alpha_{\bar{x}_2}=-3\leqslant\dfrac{4+\lambda}{2}$,所以全局最优必要性条件[NC2]在$\bar{\boldsymbol{x}}$处成立。但不难发现全局最优充分性条件[SC2]在$\bar{\boldsymbol{x}}$处却不满足,因为当 $\lambda>12$ 时,矩阵

$$\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+2\mathrm{diag}(\alpha_{\bar{x}})=\begin{pmatrix}-12+\lambda & 2-\lambda\\ 2-\lambda & 7+\lambda\end{pmatrix}$$

不一定是半正定的,所以全局最优充分性条件[SC2]在$\bar{\boldsymbol{x}}$处不成立。

参考文献:

[1] CANFIED R A. Multipoint cubic surrogate function for sequential approximate optimization[J]. Struct Multidiscip Optim,2004,27:326-336.

[2] INGBER L,ROSEN B. Genetic algorithms and very fast simulated reannealing:a comparison[J]. Mathematical and Computer Modelling,1992,16(11):87-100.

[3] BILLIONNETA A,ELLOUMI S,PLATEAU M C. Improving the performance of standard solvers for quadratic 0-1 programs by a tight convex reformulation:the QCR method[J]. Discrete Applied Mathematics,2009,157(6):1185-1197.

[4] BILLIONNETA A,ELLOUMI S,PLATEAU M C. Extending the QCR method to general mixed-integer programs[J]. Mathematical Programming,2012,131(1/2):381-401.

[5] AARDAL K,WOLSEY L A. Lattice based extended formulations for integer linear equality systems[J]. Mathematical Programming,2010,121(2):337-352.

[6] 李国权. 非凸二次规划问题的全局最优性条件和全局优化方法[D]. 上海:上海大学,2012.

LI G Q. Global optimality conditions and optimization

methods for nonconvex quadratic programming problems [D]. Shanghai: Shanghai University, 2012.
[7] WU Z Y, YANG Y J, BAI F S, et al. Global optimality conditions and optimization methods for quadratic assignment problems[J]. Applied Mathematical and Computation, 2012, 218(11): 6214-6231.
[8] QUAN J, WU Z Y, LI G Q. Global optimality conditions for some classes of polynomial integer programming problems[J]. Journal of Industrial and Management Application, 2011, 7(1): 67-78.
[9] 田静,吴至友,UGON J. 一类特殊多项式整数规划问题的最优化算法[J]. 运筹学学报,2011,15(4):23-35.
TIAN J, WU Z Y, UGON J. Optimization methods for a class of integer polynomial programming problems[J]. Operations Research Transactions, 2011, 15(4): 23-35.

Operations Research and Cybernetics

Global Optimality Conditions for a Class of Polynomial Integer Programming Problems with Linear Constraints

CHEN Lu, LI Guoquan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] In this paper, a class of polynomial integer programming problems with linear equality constraints is considered. This class of problems has a wide range of practical applications and is NP hard. Global optimality conditions are to character the global minimize as theoretical research, which are also important criterion for designing global optimization methods. [**Methods**] We study the global optimality conditions by using the penalty function method, and give some examples to illustrate how to use the global optimality conditions to check a given point is or is not a global minimizer. [**Findings**] Some global optimality conditions for such problems are presented, including the necessary global optimality conditions and sufficient global optimality conditions. [**Conclusions**] The global optimality conditions can be used to check a given point is or is not a global minimizer.

Keywords: polynomial integer programming; linear equality constraints; global optimality conditions

(责任编辑　黄　颖)