DOI:10.11721/cqnuj20170116

Hanner 不等式及其推广*

何志昊
(北京石油学院附属中学，北京 100083)

摘要:【目的】给出 Hanner 不等式的一个非常简洁的初等证明。【方法】利用幂函数的级数展式进行研究。【结果】得到了 Hanner 不等式的一个简洁证明。【结论】在幂函数的级数展式基础上得到了 2 个 Hanner 不等式的推广。

关键词: Hanner 不等式；幂函数；级数展式

中图分类号:O178 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)01-0059-02

Hanner[1]在研究 L^p 空间的凸性时，给出了一个后来被称为 Hanner 不等式的范数不等式，文献[2-3]给出了 Hanner 范数不等式的进一步推广。在文献[4]中给出了关于非负数的 Hanner 不等式，即对任意 $1<p<2$ 和 $0<b<a$ 有不等式

$$(a+b)^p+(a-b)^p\geqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2 \tag{H}$$

成立。当 $t>0$ 时 $y=t^p$ 是凸函数。由凸函数的性质可知，对任意的 $0<b<a$ 有

$$(a+b)^p+(a-b)^p\geqslant 2a^p \tag{1}$$

成立。

显然，Hanner 不等式是(1)式的改进。这里利用幂函数的级数展式，给出 Hanner 不等式的一个非常简洁的初等证明，并由这个证明，可以得到 Hanner 不等式的进一步推广。

证明 首先，对任意 $1<p<2$ 和 $0<r<1$，设

$$g(r)=(1+r)^p+(1-r)^p-2-p(p-1)r^2,$$

对任意 $-1<x<1$，幂级数

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots$$

成立。因此，对任意的 $0<r<1$，有

$$(1+r)^p+(1-r)^p=2\left(1+\frac{p(p-1)}{2!}r^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}r^4+\cdots\right) \tag{2}$$

由(2)式得到，对任意 $1<p<2$ 和 $0<r<1$ 有

$$(1+r)^p+(1-r)^p\geqslant 2+p(p-1)r^2。 \tag{3}$$

对任意 $0<b<a$，在(3)式中令 $r=\frac{b}{a}$，则 $0<r<1$ 且

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^p+\left(1-\frac{b}{a}\right)^p\geqslant 2+p(p-1)\frac{b^2}{a^2}。$$ 证毕

以上则是 Hanner 不等式的一个简洁证明。

实际上，由(2)式还可以得到，对任意 $1<p<2$ 和 $0<r<1$ 有

$$(1+r)^p+(1-r)^p\geqslant 2+p(p-1)r^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{12}r^4。 \tag{4}$$

类似地，由(2)式也可以得到 Hanner 不等式的推广。

推广 1 对任意 $1<p<2$ 和 $0<b<a$ 有不等式

* **收稿日期:**2016-10-15 **修回日期:**2016-12-25 **网络出版时间:**2017-01-12 11:29

第一作者简介:何志昊，男，研究方向为数学分析，E-mail:zhihao_00@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1129.014.html

$$(a+b)^p+(a-b)^p \geqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{12}a^{p-4}b^4 \tag{5}$$

和

$$(a+b)^p+(a-b)^p \geqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{12}a^{p-4}b^4+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{360}a^{p-6}b^6 \tag{6}$$

成立。

当 $2<p<3$ 时,(2)式右端从第三项起,其系数均为负。因此,可以得到如下推广。

推广 2 对任意的 $2<p<3$ 和 $0<b<a$,不等式

$$(a+b)^p+(a-b)^p \leqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2 \tag{7}$$

和

$$(a+b)^p+(a-b)^p \leqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{12}a^{p-4}b^4 \tag{8}$$

成立。

从得到的结论表明,当 $2<p<3$ 时不等式(7)式和(8)式刚好与 $1<p<2$ 时的不等式(H)和(5)式不等号相反。由(2)式还可以进一步讨论当 $3<p<4$ 等其他情形。

参考文献:

[1] HANNER O. On the uniform convexity of L^p and 1^p[J]. Arkiv for Math,1956(3):239-244.

[2] KIGAMI A,Okazaki Y,Takahashi Y. A generalization of Hanner's inequality[J]. Bull Kyushu Inst Tech Math Natur Sci,1996,43:9-13.

[3] 张平芳. L^q 中一个不等式的推广[J]. 数学杂志,2001,21(4):473-475.
ZHANG P F. An extension of inequality in L^q[J]. J of Math,2001,21(4):473-475.

[4] ELLIOTT H L,LOSS Y M. 分析学[M]. 王斯雷译. 北京:高等教育出版社,2006.
ELLIOTT H L,LOSS Y M. Analysis[M]. WANG S L, translation. Beijing:Higher Education Press,2006.

Hanner's Inequality and Its Generalization

HE Zhihao

(The High School Affiliated to Beijing University of Petroleum, Beijing 100083, China)

Abstract: [**Purposes**] Give a preliminary proof of the Hanner's inequality. [**Methods**] Making use of the series expansion of power function. [**Findings**] Get a preliminary proof of the Hanner's inequality. [**Conclusions**] Base on the series expansion of power function, get two gerneralizations of Hanner's inequality.

Keywords: Hanner's inequality; power function; the series expansion

(责任编辑 黄 颖)